F 2557

51. 1992

Hi: 3-6.

ROMÂNĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1

TOMUL 51

ianuarie — februarie

1992

ACADEMIA MOSZAKI

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. CONSTANTIN ARAMĂ
Acad. GHEORGHE BUZDUGAN
Acad. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. NICOLAE PATRAULEA
Acad. RADU VOINEA
GEORGE BĂRĂNESCU, membru corespondent
NICOLAE CRISTESCU, membru corespondent
EMANUEL DIACONESCU, membru corespondent
LAZĂR DRAGOŞ, membru corespondent
NICOLAE I. MANOLESCU, membru corespondnet
GHEORGHE SILAŞ, membru corespondent
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. AUGUSTIN PETRE
Prof. MIRCEA RADEŞ
Dr. EUGEN SOÓS
Dr. doc. VIOREL VISARION

TEODOR OROVEANU, membru corespondent, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA

TEODOR OROVEANU, membru corespondent, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la: ORION SRL, Spaiul Indepepdenţei 202 A, Bucureşti 6, P.O. Box 74—19 Bucureşti, Tx 11939 CBTxR, Fax (400) 424169; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125, sectorul 1, tel. 50.76.80

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 51, nr. 1 **ianuarie — februarie 1992**

F 2567

SUMAR

STUDII

ELENA UNGUREANU-DAVID, O problemă inversă în hidrodinamica mediilor poroase neomogene 3

ŞT. STAICU, F. P. SIMION, M. PREDOI, Vibraţiile sistemelor plane articulate elastic 13

ADELINA GEORGESCU, Aspecte ale modelării stratului limită al atmosferei. I. . . . 25

I. STROE, Mişcarea generală a vehiculului spaţial pe orbite ecuatoriale plane 43

V. MUŞAT, O metodă integrală simplă de analiză a mişcării potenţiale în jurul profilelor aerodinamice 49

N. GHERGHEL, L. SEGAL, Determinarea stării de tensiuni şi deformaţii în bucşele elastice cu nervuri din structura dispozitivelor autocentrante, folosind metoda elementelor de frontieră 61

E. DECIU, M. PREDOI, DANIELA CRĂIŢA CARP-CIOCÂRDIA, Contribuţii la studiul vibraţiilor membranelor circulare utilizînd varianta numerică a metodei delta. 73

ŞT. TEODORESCU, V. TALLE, Ş. VASILESCU, Oscilaţii produse de sarcini mobile asupra grinzilor pe mediu elastic. 81

I. SETEANU, M. ERHAN, VICTORIA RĂDULESCU, Calibrarea parametrilor hidraulici prin programare liniară 89

CORINA FETECĂU, FLORINA-LILIANA BUZESCU, Modelarea matematică a comportamentului dinamic al mecanismului de formare a rostului de la maşina de ţesut A—100 99

RECENZII 109

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 1, 1992, P. 1—112

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental : de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînare şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul comitetului de redacţie, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

STUDII

O PROBLEMĂ INVERSĂ ÎN HIDRODINAMICA MEDIILOR POROASE NEOMOGENE

de ELENA UNGUREANU-DAVID

Institutul de Matematică, București

În lucrarea de față se rezolvă o problemă inversă de mișcare plană a unui fluid într-un mediu poros omogen pe porțiuni. Problema constă în determinarea curbei închise care separă mediul poros în două zone cu permeabilități diferite, cunoscînd singularitățile mișcării, precum și mișcarea fluidului în domeniul din interiorul curbei respective.

1. INTRODUCERE

Problemele inverse din mecanica fluidelor au o importanță practică la fel de mare ca și problemele directe. Ele apar atunci cînd mișcarea fluidului este cunoscută, deci se știu presiunea fluidului, viteza, liniile de curent, dar nu se cunoaște, total sau parțial, forma domeniului ocupat de fluid, urmînd ca ea să fie determinată din rezolvarea problemei inverse.

În hidrodinamica mediilor poroase apar însă și alte probleme inverse, anume cele referitoare la mediile poroase neomogene sau omogene pe porțiuni, cînd nu se cunoaște frontiera de separare a unor subdomenii, în care coeficienții de filtrație ai mediului poros sînt diferiți între ei. În cazul unui mediu poros format din două subdomenii, frontiera de separare a lor poate fi găsită dacă se cunoaște mișcarea fluidului numai în unul din subdomenii plus singularitățile mișcării în tot domeniul.

În lucrarea de față se consideră mișcarea plană a unui fluid incompresibil într-un mediu poros nelimitat, cu coeficientul de filtrație diferit în exteriorul și respectiv interiorul unei curbe simple închise regulate, cu toate punctele la distanță finită, a cărei formă este necunoscută. Singularitățile mișcării sînt date de existența a două izvoare situate în domeniul exterior curbei închise, iar la mari distanțe există un curent uniform. Se dă de asemenea potențialul complex al mișcării fluidului din domeniul interior. Problema inversă constă în determinarea curbei de separare a celor două domenii.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

În planul mișcării alegem sistemul de axe ortogonale xOy și introducem variabila complexă $z = x + iy$. O curbă simplă închisă regu-

lată L împarte planul în două domenii D_1 și D_2 situate în exteriorul și respectiv interiorul lui L. Originea sistemului de axe se află în D_2. Forma curbei L este necunoscută deocamdată, dar din ipotezele făcute asupra mișcării, se va vedea că ea este simetrică față de cele două axe.

Coeficientul de filtrație este egal cu $k_1 = \text{const.}$ în D_1 și cu $k_2 = \text{const.}$ în D_2, $k_1 \neq k_2$. În mediul poros se găsește un fluid incompresibil vîscos. În punctele $M_1(l, 0)$ și $M_2(-l, 0)$ de pe axa reală, ambele situate în domeniul exterior, se află două izvoare de debite Q și respectiv $-Q$. La mari distanțe există un curent uniform de viteză V_0, paralel cu axa Ox.

Potențialele complexe ale mișcării se notează cu $f_1(z)$, $f_2(z)$ în domeniile D_1, respectiv D_2, iar vitezele complexe cu $w_1(z)$, $w_2(z)$, unde $w_j(z) = \mathrm{d}f_j/\mathrm{d}z$, $j = 1,2$ [1]. Aceste funcții se scriu sub forma

$$f_j(z) = f_0(z) + f_j^*(z), \qquad w_j(z) = w_0(z) + w_j^*(z), \qquad j = 1, 2 \tag{1}$$

unde $f_0(z)$ și $w_0(z)$ reprezintă potențialul complex și viteza complexă corespunzătoare, date de singularitățile mișcării. În cazul nostru avem [1, 2]

$$f_0(z) = V_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - l}{z + l}, \quad w_0(z) = \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = V_0 + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z - l} - \frac{1}{z + l}\right). \tag{2}$$

Funcțiile $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$ sînt olomorfe în domeniul D_1, respectiv D_2 și la fel funcțiile derivate $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$.

Se admite cunoscută mișcarea din D_2, presupunînd că ea este caracterizată de potențialul complex

$$f_2(z) = (V_0 + A)z + \frac{Q + Q^*}{2\pi} \ln \frac{z - l}{z + l} \tag{3}$$

unde A și Q^* sînt niște constante, avînd dimensiunea unei viteze, respectiv a unui debit și ele pot fi alese oricum, de alegerea lor depinzînd forma curbei L. Din (3) rezultă $w_2(z)$ și avînd în vedere (1), (2), avem

$$w_2(z) = V_0 + A + \frac{Q + Q^*}{2\pi}\left(\frac{1}{z - l} - \frac{1}{z + l}\right),$$

$$w_2^*(z) = A + \frac{Q^*}{2\pi}\left(\frac{1}{z - l} - \frac{1}{z + l}\right) \tag{4}$$

Notînd cu z^* afixa unui punct oarecare de pe curba L, ecuația acestei curbe se poate scrie $z^* = z^*(s)$, unde $z^*(s)$ este o funcție încă necunoscută, iar s este un parametru real, pe care îl vom preciza mai departe, cu $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ și $z^*(s_1) = z^*(s_2)$, curba fiind închisă.

Din punct de vedere mecanic, pe curba L trebuie îndeplinite două condiții de racordare a mișcării, anume presiunile fluidului p_1 și p_2 și

componentele normale v_{1n}, v_{2n} ale vitezelor de filtrație din cele două domenii trebuie să fie egale. Din legea lui Darcy, care în absența forțelor masice, se scrie $v = -(k/\gamma)$ grad p, condiția referitoare la presiuni devine $v_{1s}/k_1 = v_{2s}/k_2$, unde v_{1s}, v_{2s} sînt componentele vitezelor de filtrație după tangenta la L luată în direcția care lasă domeniul interior la stînga. Folosind relațiile [3, 4]

$$v_s - iv_n = w(z^*)\frac{dz^*}{ds} \Big/ \left|\frac{dz^*}{ds}\right|,$$

cele două condiții de pe L se scriu

$$k_2 \mathrm{Re}\left[w_1(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right] = k_1 \mathrm{Re}\left[w_2(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right],$$

$$\mathrm{Im}\left[w_1(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right] = \mathrm{Im}\left[w_2(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right],$$

sau restrînse într-o singură relație complexă

$$2w_2(z^*)\frac{dz^*}{ds} = (1+K)w_1(z^*)\frac{dz^*}{ds} - (1-K)\overline{w_1(z^*)}\,\overline{\frac{dz^*}{ds}}, \quad K = \frac{k^2}{k_1}. \tag{5}$$

Aici se înlocuiesc expresiile (1), (2), (4) și mai rămîn necunoscute funcțiile $w_1^*(z)$ și $z^*(s)$. Problema noastră inversă este de a găsi funcția $z^*(s)$, după aceea se poate afla și funcția $w_1^*(z)$.

În punctul de la infinit funcția $f_1^*(z)$ este regulată, de unde rezultă comportarea la infinit a funcției derivate $w_1^*(z)$ [1, 3]

$$w_1^*|_\infty = 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{6}$$

3. METODA DE REZOLVARE

Problema se rezolvă trecînd la un alt plan complex Z și se efectuează o reprezentare conformă a domeniului $\mathcal{D}_1$ din planul complex z pe domeniul $\mathcal{D}_1$ din exteriorul cercului unitate $|Z| = 1$, notat cu C, din planul complex Z. Funcția care realizează această reprezentare conformă este necunoscută deocamdată, datorită necunoașterii formei domeniului $\mathcal{D}_1$, dar ea trebuie să fie olomorfă în $\mathcal{D}_1$, cu excepția punctului de la infinit, unde are un pol de ordinul întîi, dacă dorim ca punctele de la infinit din cele două plane să se corespundă, deci ea are forma

$$z = a_1 Z + a_0 + a_{-1}Z^{-1} + a_{-2}Z^{-2} + a_{-3}Z^{-3} + \ldots$$

cu coeficienții a_j, $j = 1, 0, -1, -2, \ldots$, necunoscuți.

Observăm că prin alegerea funcțiilor f_0 și f_2 sub forma (2) și (3), mișcarea este simetrică față de axele de coordonate. Atunci și curba L este simetrică față de aceste axe. În acest caz toți coeficienții din dezvoltarea de mai sus sînt reali și în plus $a_0 = a_{-2} = \ldots = a_{-2k} = \ldots = 0$, iar funcția de reprezentare conformă se scrie

$$z = h(Z) = a_1 Z + a_{-1} Z^{-1} + a_{-3} Z^{-3} + \ldots \tag{7}$$

Unui punct de afixă z^* de pe L îi corespunde un punct de afixă $t = e^{i\theta}$ de pe cercul unitate C, cu $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Funcția $z = h(t)$ realizează o corespondență biunivocă între L și C. Înlocuind pe t cu $e^{i\theta}$, se obține z^* ca funcție de θ, acesta fiind un parametru real, de aceea în ecuația $z^* = z^*(s)$ a curbei L, parametrul s poate fi luat egal cu θ. Acum problema inversă revine la a găsi funcția $h(t)$ deci de a afla coeficienții necunoscuți din dezvoltarea (7).

Punctele de intersecție ale lui L cu axele de coordonate din planul z corespund punctelor de intersecție ale lui C cu axele de coordonate din planul Z. Astfel avem $h(1) = a$ (real) și $h(i) = ib$ (b real). Punctelor M_1 și M_2, în care se găsesc izvoarele, le corespund două puncte de pe axa reală, de coordonate $(\pm d, 0)$, astfel încît $h(\pm d) = \pm l$, cu $l > a$, $d > 1$.

Cu aceste considerații putem calcula

$$\frac{dz^*}{ds} = \frac{dz^*}{d\theta} = \frac{dh}{dt}\frac{dt}{d\theta} = it(a_1 - a_{-1}t^{-2} - 3a_{-3}t^{-4} - \ldots). \tag{8}$$

Cînd se calculează conjugata acesteia, se ține seama că $\bar{t} = e^{-i\theta} = t^{-1}$.

Pentru scrierea problemei în planul Z, se folosesc formulele de transformare pentru funcțiile care reprezintă vitezele complexe [1]

$$w_1(z)\frac{dz}{dZ} = W_1(Z), \quad w_1^*(z)\frac{dz}{dZ} = W_1^*(Z), \tag{9}$$

unde $W_1^*(Z)$ este o funcție olomorfă în $\mathcal{D}_1$, iar la infinit este de forma

$$W_1^*|_\infty = 0\left(\frac{1}{Z^2}\right). \tag{10}$$

Cu aceste considerente, relația (5) devine

$$(1+K)tW_1^*(t) + (1-K)t^{-1}\overline{W_1^*(t)} = Bt\frac{dh}{dt} - \frac{1-K}{t}Y_0\frac{\overline{dh}}{dt} + \tag{11}$$

$$+ Dt\left(\frac{1}{h(t)-l} - \frac{1}{h(t)+l}\right)\frac{dh}{dt} - \frac{1-K}{t}q\left(\frac{1}{\overline{h(t)}-l} - \frac{1}{\overline{h(t)}+l}\right)\frac{\overline{dh}}{dt},$$

unde

$$B = (1 - K)V_0 + 2A, \quad D = (1 - K)q + 2q^*, \quad q = \frac{Q}{2\pi}, \quad q^* = \frac{Q^*}{2\pi}, \tag{12}$$

Mai departe vom introduce următoarea funcție olomorfă pe porțiuni:

$$\Phi(Z) = \begin{cases} W_1^*(Z), & \text{pentru } Z \text{ în } \mathcal{D}_1, \\ \overline{W_1^*\left(\frac{1}{\bar{Z}}\right)}, & \text{pentru } Z \text{ în } \mathcal{D}_2 \end{cases} \tag{13}$$

unde $\mathcal{D}_2$ este domeniul interior lui C.

Se observă că această funcție verifică relația

$$\overline{\Phi^+(t)} = \Phi^-(t), \tag{14}$$

unde $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ sînt valorile la limită pe C ale funcției $\Phi(Z)$ din domeniul interior, respectiv cel exterior.

Atunci relația (11) se poate scrie

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{15}$$

unde

$$G(t) = \frac{K+1}{K-1} t^2,$$

$$g(t) = \frac{B}{1-K} t^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - V_0 \frac{\overline{\mathrm{d}h}}{\mathrm{d}t} + \frac{D}{1-K} t^2 \left(\frac{1}{h(t)-l} - \frac{1}{h(t)+l}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} -$$

$$- q\left(\frac{1}{h(t)-l} - \frac{1}{h(t)+l}\right)\frac{\overline{\mathrm{d}h}}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

cu condiția $K \neq 1$. Ținînd cont de (10), funcția $\Phi(Z)$ are comportarea la infinit de forma

$$\Phi|_\infty = 0\left(\frac{1}{Z^2}\right). \tag{17}$$

Relația (15) poate fi privită ca o problemă la limită de tip Riemann pentru funcția $\Phi(Z)$ olomorfă pe porțiuni, cu condiția (15) pe C și (16) la infinit. Însă termenul liber $g(t)$ conține funcția necunoscută $h(t)$, scopul nostru fiind tocmai aflarea acestei funcții. Pentru aceasta se procedează astfel: mai întîi se scrie soluția problemei lui Riemann, considerînd pentru moment funcția $h(t)$ cunoscută, apoi din relația (14) se determină funcția $h(t)$.

Problema la limită de tip Riemann (15) este neomogenă. Existența și unicitatea soluției depind de valoarea indicelui problemei, care este dat de formula [3]

$$n = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_C .$$

În cazul nostru el este egal cu 2. Fiind pozitiv, soluția generală a problemei neomogene există pentru orice termen liber $g(t)$. În ce privește unicitatea, soluția generală conține un polinom de gradul 2, cu coeficienți nedeterminați, însă datorită condiției (17), polinomul se reduce la o constantă C_0, care va fi determinată ulterior, dintr-o condiție suplimentară.

Soluția generală a problemei se scrie [3, 4]

$$\Phi(Z) = \begin{cases} \dfrac{K-1}{K+1} \dfrac{1}{Z^2} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - Z} + \frac{C_0}{Z^2}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - Z} + \frac{K+1}{K-1} C_0, & Z \text{ în } \mathscr{D}_2 \end{cases} \tag{18}$$

Integralele de tip Cauchy care apar aici se calculează prin metodele cunoscute. Astfel avem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta^2 \frac{dh}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - Z} = \begin{cases} -Z^2 \dfrac{dh}{dZ} + a_1 Z^2 - a_{-1}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \\ a_1 Z^2 - a_{-1}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{dh}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - Z} = \begin{cases} 0, & Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{\overline{dh}}{dZ}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta^2}{h(\zeta) - l} \frac{dh}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - Z} = \begin{cases} -\dfrac{Z^2}{h(Z) - l} \dfrac{dh}{dZ} + \dfrac{d^2}{Z - d} + Z + \dfrac{l}{a_1}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \\ Z + \dfrac{l}{a_1}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\overline{h(\zeta)} - l} \frac{\overline{dh}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - Z} = \begin{cases} 0, & Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{1}{\overline{h(Z)} - l} \dfrac{\overline{dh}}{dZ} - \dfrac{1}{\overline{Z} - d}, & Z \text{ în } \mathscr{D}_2 \end{cases}$$

și analog celelalte, avînd în vedere că

$$h(t) \pm l = (t \pm d)\left[a_1 \pm \frac{a_{-1}}{td} \pm a_{-3}\frac{t^2 \mp td + d^2}{t^3 d^3} \pm \ldots\right] \tag{19}$$

Atunci din (20) rezultă

$$\Phi(Z) = \frac{1}{K+1}\left[B\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}Z} + D\left(\frac{1}{h(Z)-l} - \frac{1}{h(Z)+l}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}Z} - \right.$$

$$- D\frac{d^2}{Z^2}\left(\frac{1}{Z-d} - \frac{1}{Z+d}\right) + \left(Ba_{-1} - 2D\frac{l}{a_1} + \right.$$

$$\left. \left. + (K+1)C_0\right)\frac{1}{Z^2} - Ba_1\right], \quad Z \text{ în } \mathscr{D}_1 \tag{20}$$

$$\Phi(Z) = -\frac{1}{K-1}\left[(K-1)V_0\frac{\overline{\mathrm{d}h}}{\mathrm{d}Z} + (K-1)q\left(\frac{1}{\overline{h(Z)}-l} - \frac{1}{\overline{h(Z)}+l}\right)\frac{\overline{\mathrm{d}h}}{\mathrm{d}Z} + \right.$$

$$+ (K-1)g\frac{Z}{d}\left(\frac{1}{Z-d^{-1}} + \frac{1}{Z+\mathrm{d}^{-1}}\right) +$$

$$\left. + Ba_1Z^2 - Ba_{-1} + 2D\frac{l}{a_1} - (K+1)C_0\right], \quad Z \text{ în } \mathscr{D}_2$$

Înlocuind aceste expresii în relația (14), obținem o ecuație diferențială pentru funcția $h(t)$, de unde, prin integrare, rezultă

$$2(K-1)(V_0 + A)h(t) + 2(K-1)(q+q^*)\ \ln\left(\frac{h(t)-l}{h(t)-l}\cdot\frac{t+d}{t-d}\right) =$$

$$= t\left[B((K-1)a_1 + (K+1)a_{-1}) - 2(K+1)D\frac{l}{a_1} + (K+1)^2C_0\right] +$$

$$+ \frac{1}{t}\left[B((K+1)a_1 + (K-1)a_{-1}) - 2(K-1)D\left(\frac{l}{a_1} - d\right) + (K^2-1)C_0\right] + C_1, \tag{21}$$

unde C_1 este o constantă de integrare.

Folosind (7), (19) și dezvoltarea în serie pentru funcția logaritmică, se identifică coeficienții puterilor lui t din ultima relație și se obține un sistem infinit de ecuații algebrice pentru coeficienții necunoscuți din dezvoltarea funcției $h(t)$. La scrierea soluției (18) a mai apărut constanta C_0,

de aceea este necesară încă o ecuație. Aceasta se obține scriind corespondența dintre două puncte fixate din cele două plane. Noi vom considera punctul $(d, 0)$ din planul Z, corespunzător punctului $(l, 0)$ din planul z și vom avea egalitatea $l = h(d)$. În acest fel sistemul de ecuații este :

$$l = a_1 d + a_{-1}d^{-1} + a_{-3}d^{-3} + \ldots \ , \ C_1 = 0,$$

$$2(K-1)(V_0 + A)a_1 = B((K-1)a_1 + (K+1)a_{-1}) - 2(K+1)Dla_1^{-1} + (K+1)^2 C_0,$$

$$2(K-1)(V_0 + A)a_{-1} - 4(K-1)(q+q^*)a_1^{-1}d^{-1}(a_{-1} + a_{-3}d^{-2}) =$$

$$= B((K+1)a_1 + (K-1)a_{-1}) + 2(K-1)D(d - la_1^{-1}) + (K^2-1)C_0,$$

$$2(K-1)(V_0 + A)_{-3} - 4(K-1)(q+q^*)a_1^{-1}d^{-1}(a_{-3} + a_{-1}a_{-3}a_1^{-1}d^{-2} +$$

$$+ \ldots) = 0,$$

.....

De aici obținem

$$C_0 = \frac{1}{K+1}\left[((K-1)V_0 + Bd^2)a_1 + 2Dla_1^{-1} - Bld\right] \tag{22}$$

$$a_{-1} = ld - a_1 d^2, \qquad a_{-3} = 0, \ a_{-5} = 0, \ldots$$

$$Ma_1^2 + Na_1 + P = 0, \tag{23}$$

unde

$$M = (K-1)(V_0 + A)d^2 - (K-1)V_0 + (K+1)A,$$

$$N = (K-1)((V_0 + A)l + (K+1)q),$$

$$P = 2(K-1)(q+q^*)l.$$

Distingem aici mai multe cazuri :

1. Dacă $V_0 = A = 0$, rezultă

$$a_1 = \frac{(q+q^*)l}{(K+1)qd}, \qquad a_{-1} = \frac{(Kq - q^*)ld^2}{(K+1)qd}$$

Pentru $Kq = q^*$, funcția de reprezentare conformă este $z = h(Z) = (l/d)Z$, ceea ce înseamnă că L este un cerc cu raza egală cu l/d. Dacă $Kq \neq q^*$, funcția de reprezentare conformă este $z = h(Z) = a_1 Z + a_{-1}Z^{-1}$. Aceasta reprezintă conform exteriorul unei elipse din planul complex z pe exteriorul unui cerc din planul complex Z, deci curba L este o elipsă de semiaxe $a = h(1) = a_1 + a_{-1}$ și $b = a_1 - a_{-1}$.

2. Dacă $q = q^* = 0$ și $M \neq 0$, rezultă

$$a_1 = \frac{(V_0 + A)ld}{M}, \quad a_{-1} = ld - \frac{(V_0 + A)ld^3}{M}$$

și curba L este o elipsă. Facem observația că pentru $A > 0$, totdeauna $M \neq 0$, deoarece $d > 1$ și avem $M > 2KA > 0$. Dacă $M = 0$ atunci problema nu are soluție.

3. Dacă $q \neq 0$, $q^* \neq 0$, dar $q + q^* = 0$, rezultă pentru $M \neq 0$, $a_1 = NM^{-1}$, $a_{-1} = l\,d - a_1 d^2$, iar pentru $M = 0$ problema nu are soluție.

4. Cazul general, cînd $V_0 \neq 0$, $A \neq 0$, $q \neq 0$, $q^* \neq 0$, avem următoarele situații :

a. Dacă $M = 0$, avem $a_1 = PN^{-1}$ pentru $N \neq 0$ și problema nu este posibilă pentru $N = 0$.

b. Dacă $M \neq 0$ și $R = N^2 - 4MP \geqslant 0$, soluția ecuației (23) este

$$a_1 = \frac{N + \sqrt{R}}{2M}.$$

Semnul se ia astfel încît $a_1 > 0$, iar a_{-1} se scoate din (23). Funcția de reprezentare conformă este $z = h(Z) = a_1 Z + a_{-1} Z^{-1}$ și curba L este o elipsă de semiaxe $a = a_1 + a_{-1}$, $b = a_1 - a_{-1}$.

Dacă $R < 0$, problema nu are soluție.

Cu aceasta problema inversă este rezolvată.

Mai departe se poate găsi potențialul complex al mișcării din domeniul exterior curbei L.

Expresia (20) pentru Z în $\mathcal{D}_1$ ne dă funcția $W_1^*(Z)$, conform definiției (13), iar cu ajutorul formulei de transformare (9), se revine la planul z, găsind astfel $w_1^*(z)$. Adunînd w_0, conform formulei (1), se obține viteza complexă în domeniul D_1 și prin integrare rezultă potențialul complex $f_1(z)$ pentru mișcarea fluidului din domeniul exterior.

Primit în redacție la 11 decembrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Edit. Academiei, București, 1957.
2. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
3. ELENA UNGUREANU-DAVID, *Probleme la limită în mișcarea fluidelor prin medii poroase neomogene*, St. Cerc. Mat., **23**, 6, (1971).
4. ELENA UNGUREANU-DAVID, S. GOGONEA, H. I. ENE, *Hidrodinamica mediilor poroase neomogene*, Edit. Tehnică, București, 1989.

VIBRAȚIILE SISTEMELOR PLANE ARTICULATE ELASTIC

de ȘT. STAICU, F. P. SIMION și M. PREDOI

Institutul Politehnic București

Lucrarea tratează problema vibrațiilor unui sistem plan de corpuri articulate cilindric, sub acțiunea unor forțe periodice de excitație, ținînd seama de influența factorilor disipativi. Se stabilesc relații matriceale care simplifică analiza răspunsului dinamic în regim staționar.

1. INTRODUCERE

Fie un sistem format din n rigide de mase m_s legate elastic prin articulațiile cilindrice cu axe paralele. În absența altor legături, sistemul mecanic va avea n grade de libertate.

Lucrarea studiază vibrațiile sistemului plan sub acțiunea unor forțe exterioare cu variație specifică în timp, luînd în considerație și efectele disipative care apar între corpurile componente.

Să considerăm triedrul fix $O_0y_0y_0z_0$ (T_0) și triedrele mobile $O_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$ (T_σ, $\sigma = 1,2, \ldots, s-1$) în raport cu care efectuează mișcări oscilatorii plane rigidul solidar cu sistemul $O_s x_s y_s z_s$ (T_s) (fig. 1).

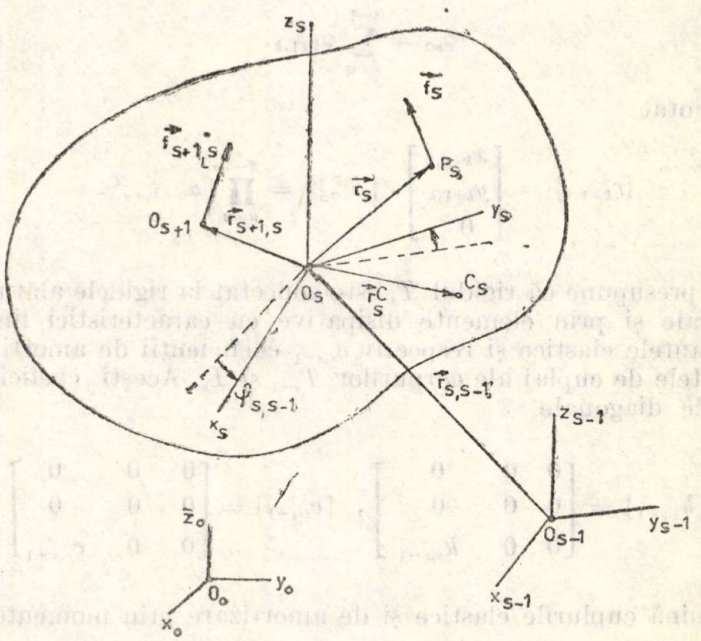


Fig. 1

Parametrii de poziție ai rigidului T_s, față de reperul mobil T_{s-1}, sînt unghiurile relative de rotație $\varphi_{s,s-1}$ dintre $O_s x_s$ și $O_{s-1}\, x_{s-1}$ care formează vectorii axiali $\vec{\lambda}_{s,s-1}$. Acestor vectori li se asociază matricele

$$\{\lambda_{s,s-1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{s,s-1} \end{bmatrix}, \quad [\hat{\lambda}_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{s,s-1} & 0 \\ \varphi_{s,s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Matricea ortogonală $[\alpha_{s,s-1}]$ de trecere din sistemul T_{s-1} în cel alăturat T_s este

$$[\alpha_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{s,s-1} & \sin\varphi_{s,s-1} & 0 \\ -\sin\varphi_{s,s-1} & \cos\varphi_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Poziția relativă a rigidului T_s, în raport cu referențialul mobil $O_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$, este precizată de vectorul de poziție $\vec{r}_{s\sigma}$ al originii O_s, exprimat prin matricea coloană

$$\{r_{s\sigma}\} = \sum_{k=\sigma}^{s-1} [\alpha_{k\sigma}]^T \{r_{k+1,k}\} \tag{3}$$

și de unghiul relativ de rotație

$$\varphi_{s\sigma} = \sum_{k=\sigma}^{s-1} \varphi_{k+1,k}, \tag{4}$$

unde s-a notat

$$\{r_{k+1,k}\} = \begin{bmatrix} x_{k+1,k} \\ y_{k+1,k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\alpha_{k\sigma}]^T = \prod_{u=\sigma}^{k-1} [\alpha_{u+1,u}]^T. \tag{5}$$

Vom presupune că rigidul T_s este conectat la rigidele alăturate prin arcuri spirale și prin elemente disipative cu caracteristici liniare. Fie $k_{s,s-1}$ constantele elastice și respectiv $c_{s,s-1}$ coeficienții de amortizare pentru elementele de cuplaj ale corpurilor T_{s-1} și T_s. Acești coeficienți apar în matricele diagonale

$$[k_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{s,s-1} \end{bmatrix}, \quad [c_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{s,s-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

care determină cuplurile elastice și de amortizare prin momentele

$$\{M_e^{s,s-1}\} = -[k_{s,s-1}]\{\lambda_{s,s-1}\} \tag{7}$$

$$\{M_r^{s,s-1}\} = -[c_{s,s-1}]\{\dot{\lambda}_{s,s-1}\}.$$

În ce privește forța perturbatoare exterioară exercitată în punctul P_s pe rigidul T_s, vom considera că proiecțiile acesteia pe axele $O_s x_s$ și $O_s y_s$ sînt funcții periodice de timp avînd pulsația p și faza $pt-\delta_s$; ele pot forma matricele coloane

$$\{f_s\} = \{f_s^0\} \cos(pt - \delta_s) \tag{8}$$

unde

$$\{f_s^0\} = [X_s^0 \; Y_s^0 \; 0]^T \tag{9}$$

este matricea amplitudinilor.

2. ECUAȚII DE MIȘCARE

Pentru studiul mișcării oscilatorii a rigidului T_s de masă m_s, în raport cu reperul fix $O_0 x_0 y_0 z_0$, se aplică mai întîi teorema impulsului:

$$m_s\{a_s^c\} = \{f_{s,s-1}\} - \{f_{s+1,s}\} + \{f_s\} \quad (s = 1,2,\ldots,n) \tag{10}$$

unde

$$\{a_s^c\} = [\ddot{\lambda}_{s0}]\{r_s^c\} + \sum_{k=1}^{s-1} [\ddot{\lambda}_{k,k-1}] \sum_{q=k}^{s-1} \{r_{q+1,q}\} \tag{11}$$

este accelerația absolută a centrului de masă C_s poziționat prin vectorul $\vec{r}_s^c$ ale cărui matrice reprezentative sînt

$$\{r_s^c\} = \begin{bmatrix} x_s^c \\ y_s^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\hat{r}_s^c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_s^c \\ 0 & 0 & -x_s^c \\ -y^c & x_s^c & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

iar $\{F_{s,s-1}\}$, $\{F_{s+1,s}\}$ reprezintă reacțiunile din articulații.

Teorema momentului cinetic, exprimată în raport cu punctul O_s, în cazul micilor oscilații ale rigidului T_s, va fi:

$$[J_s]\{\ddot{\lambda}_{s0}\} + m_s[\hat{r}_s^c] \sum_{k=1}^{s} [\ddot{\lambda}_{k,k-1}] \sum_{q=k}^{s-1} \{\hat{r}_{q+1,q}\} = \tag{13}$$

$$= [\hat{r}_{s+1,s}]\{f_{s+1,s}\} + [k_{s+1,s}]\{\lambda_{s+1,s}\} - [k_{s,s-1}]\{\lambda_{s,s-1}\} +$$

$$+ [c_{s+1,s}]\{\dot{\lambda}_{s+1,s}\} - [c_{s,s-1}]\{\dot{\lambda}_{s,s-1}\} + [\hat{r}_s]\{f_s\}$$

$$(s = 1,2,\ldots,n),$$

unde

$$[J_s] = \begin{bmatrix} J_x^s & -J_{xy}^s & 0 \\ -J_{yx}^s & J_y^s & 0 \\ 0 & 0 & J_z^s \end{bmatrix} \tag{14}$$

reprezintă matricea tensorului de inerţie al solidului considerat, relativ la reperul $O_s x_s y_s z_s$, iar $[\hat{r}_s]$ este matricea antisimetrică a vectorului $\vec{r}_s$ de forma (12).

Eliminînd între relaţiile de recurenţă (10), (13) forţele interioare din articulaţii, rezultă ecuaţia matriceală diferenţială de ordinul doi

$$[M]\{\ddot{\lambda}\} + [C]\{\dot{\lambda}\} + [K]\{\lambda\} = \{F\} \tag{15}$$

unde

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{21}]^T & \dots & [M_{i1}]^T & \dots & [M_{n1}]^T \\ [M_{21}] & [M_{22}] & [M_{32}]^T \dots & [M_{i2}]^T & \dots & [M_{n2}]^T \\ \vdots & & & & & \\ [M_{i1}] & [M_{i2}] \dots [M_{ij}] \dots & & [M_{ii}] & [M_{i+1,i}]^T \dots & [M_{ni}]^T \\ \vdots & & & & & \\ [M_{n1}] & [M_{n2}] \dots & & [M_{ni}] \dots & & [M_{nn}]^T \end{bmatrix} \tag{16}$$

este matricea simetrică generală de inerţie, exprimată în funcţie de blocurile de matrice

$$[M_{ij}] = m_i [\hat{r}_i^c] [\hat{r}_{j+1,j}]^T + [\hat{r}_{i+1,i}] [\hat{r}_{j+1,j}] \sum_{k=i+1}^{n} m_k, \tag{17}$$

$$[M_{ii}] = [J_i] + [\hat{r}_{i+1,i}] [\hat{r}_{i+1,i}]^T \sum_{k=i+1}^{n} m_k$$

De asemenea matricea bandă

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{10}] + [k_{21}] & -[k_{21}] & & & \\ -[k_{21}] & [k_{21}] + [k_{32}] & -[k_{32}] & & \\ & -[k_{s,s-1}] & [k_{s,s-1}] + [k_{s+1,s}] & -[k_{s+1,s}] & \\ & & -[k_{n,n-1}] & [k_{n,n-1}] & \end{bmatrix} \tag{18}$$

este matricea generală de elasticitate, $[c]$ reprezintă matricea amortizărilor care are aceeaşi formă cu (18), iar

$$\{\lambda\}^T = [\{\lambda_{10}\}^T \{\lambda_{20}\}^T \dots \{\lambda_{s0}\}^T \dots \{\lambda_{n0}\}^T] \tag{19}$$

este matricea absolută de poziţie a sistemului, care conţine blocurile

$$\{\lambda_{s0}\}^T = \left[0 \quad 0 \quad \sum_{k=1}^{s} \varphi_{k,k-1} \right]. \tag{20}$$

Matricea coloană a forțelor perturbatoare $\{F\}$ poate fi scrisă sub forma

$$\{F\} = [N]\{f\}, \tag{21}$$

în care s-a notat

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_{11}] & [N_{21}] & \dots & [N_{\sigma 1}] & \dots & [N_{n1}] \\ & [N_{22}] & \dots & [N_{\sigma 2}] & \dots & [N_{n2}] \\ & & & \dots\dots & & \dots\dots \\ & & [N_{ss}] & \dots [N_{\sigma s}] & \dots & [N_{ns}] \\ & & & \dots\dots & & \dots\dots \\ & & & & [N_{n-1,n-1}] & [N_{n,n-1}] \\ & & & & & [N_{nn}] \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$[N_{ss}] = [\hat{r}_s], \quad [N_{\sigma s}] = [\hat{r}_{s+1,s}]$$

$$\{f\}^T = [\{f_1\}^T \ \{f_2\}^T \ \dots \{f_s\}^T \ \dots \{f_n\}^T].$$

Efectuînd calculele matricea (21) devine

$$\{F\} = \begin{bmatrix} \{F_1^0\} \cos(pt - \gamma_1) \\ \{F_2^0\} \cos(pt - \gamma_2) \\ \vdots \\ \{F_n^0\} \cos(pt - \gamma_n) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

În cazul în care se ia în considerație și influența poziției mecanismului asupra vibrațiilor, matricele $[M_{ij}]$ și $[N_{\sigma s}]$ capătă forma

$$[M_{ij}] = m_i[r_i^c][\alpha_{ij}][\hat{r}_{j+1,j}]^T + \tag{24}$$

$$+ [\hat{r}_{i+1,i}][\alpha_{ij}][\hat{r}_{j+1,j}]^T \sum_{k=i+1}^{n} m_k$$

$$[N_{\sigma s}] = [\hat{r}_{s+1,s}][\alpha_{\sigma s}],$$

în funcție de matricele de trecere $[\alpha_{ij}]$, $[\alpha_{\sigma s}]$.

3. ANALIZA REGIMULUI STAȚIONAR

Soluția sistemului (15) se compune dintr-o vibrație liberă amortizată care se suprapune unei vibrații forțate armonice de pulsație p.

Pentru a simplifica studiul, în locul coordonatelor $\{\lambda\}$ se utilizează planul complex al variabilelor $\{\xi\}$ care formează matricea

$$\{\xi\}^T = [\{\xi_{10}\}^T \ \{\xi_{20}\}^T \ \dots \ \{\xi_{n0}\}^T]. \tag{25}$$

Admițînd soluțiile staționare de forma complexă

$$\{\xi_{\sigma 0}\} = \{\xi^0_{\sigma 0}\}\, e^{i(pt-\frac{\beta}{\sigma 0})} \tag{26}$$

ecuația diferențială (15) conduce la sistemul algebric neomogen

$$([K] - p^2[M] + ip[C])\{\xi\} = \{\Phi_0\}\, e^{ipt} \tag{27}$$

unde

$$\{\Phi_0\}^T = [\{F^0_1\}^T\, e^{-i\gamma_1}\ \{F^0_2\}^T\, e^{-i\gamma_2}\ \ldots\ \{F^0_n\}^T\, e^{-i\gamma_n}]. \tag{28}$$

Dacă se notează cu

$$[\zeta] = [K] - p^2[M] + ip[C],\ \det\,[\zeta] \neq 0, \tag{29}$$

matricea complexă pătratică a matricelor constante $[M]$, $[C]$, $[K]$ corespunzătoare pulsației p, ecuațiile (27) se pot scrie sub forma restrînsă

$$[\zeta]\,\{\xi\} = \{\Phi_0\}\, e^{ipt}. \tag{30}$$

Rezolvînd sistemul (30) se obține matricea complexă a elongațiilor absolute

$$\{\xi\} = [Z]\{\Phi_0\}\, e^{ipt}, \tag{31}$$

în funcție de matricea inversă

$$[Z] = [\zeta]^{-1}. \tag{32}$$

Pornind de aici rezultă soluțiile

$$\{\lambda\} = \mathrm{Re}\ \{\xi\} \tag{33}$$

și matricea amplitudinilor

$$\{\lambda_0\} = \{|\,\xi\,|\} = [|\,Z\,|]\{\Phi_0\} =$$

$$= [\{\lambda^0_{10}\}^T\ \ldots\ \{\lambda^0_{\sigma 0}\}^T\ \ldots\ \{\lambda^0_{n0}\}^T]^T. \tag{34}$$

Notînd cu

$$\{E\} = [\{e\}^T\ \ldots\ \{e\}^T\ \ldots\ \{e\}^T]^T \tag{35}$$

matricea coloană unitate și cu

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & & \\ & \gamma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma_\sigma & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \gamma_n \end{bmatrix} \tag{36}$$

matricea diagonală a defazajelor forțelor de excitație, rezultă următoarea matrice coloană pentru defazajele mișcărilor oscilatorii

$$\{\beta\} = ([\gamma] - [\arg Z])\{E\} = [\beta_{10}\ \beta_{20}\ \ldots\ \beta_{\sigma 0}\ \ldots\ \beta_{n0}]^T. \tag{37}$$

4. APLICAȚIE

Vom considera ca aplicație modelarea brațului unui robot manipulator format din bara 1 ($l_1 = 0{,}6$ m, $m_1 = 8$ kg) și bara 2 ($l_2 = 0{,}3$ m, $m_2 = 4$ kg). Articulațiile au cuple elastice de constante $k_1 = 700$ Nm/rad și $k_2 = 300$ N. m/rad și coeficienți de amortizare $c_1 = 30$ N. s/rad și $c_2 = 20$ N. s/rad.

Brațul este supus unor vibrații forțate de expresii

$$f_1 = 10 \cos\left(pt - \frac{\pi}{6}\right) \text{ [N]} \qquad (38)$$

$$f_2 = 5 \cos\left(pt - \frac{\pi}{3}\right) \text{ [N]}$$

cu orientările din figura 2.

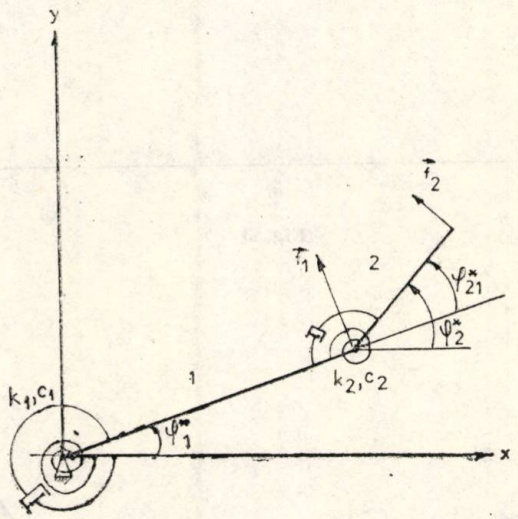


Fig. 2

Pulsațiile proprii ale sistemului fără amortizare sînt $p_1 = 14{,}32\ s^{-1}$, $p_2 = 80{,}38\ s^{-1}$, calculate pentru $\varphi^*_{21} = \varphi^*_{20} - \varphi^*_{10} = 0$, unde φ^*_{10}, φ^*_{20} sînt unghiurile din figura 2 pentru brațul liber.

Calculele efectuate prin programul scris în limbajul Pascal, cuprind asamblarea matricelor $[M]$, $[K]$, $[C]$ și rezolvă prin metoda Gauss cu pivotare sistemul (27). Modelul ales permite o verificare rapidă a soluției analitice.

În figurile 3 și 5 sînt reprezentate amplitudinile φ_1 și φ_2 raportate la deformațiile statice sub acțiunea forțelor f_{1max} și f_{2max}. Ca ordin de mărime $\varphi_{1\,max} = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ rad., $\varphi_{2\,max} = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ rad. Se remarcă dependența puternică a amplitudinilor de poziția relativă a barelor în special la pulsații apropiate de cea de rezonanță.

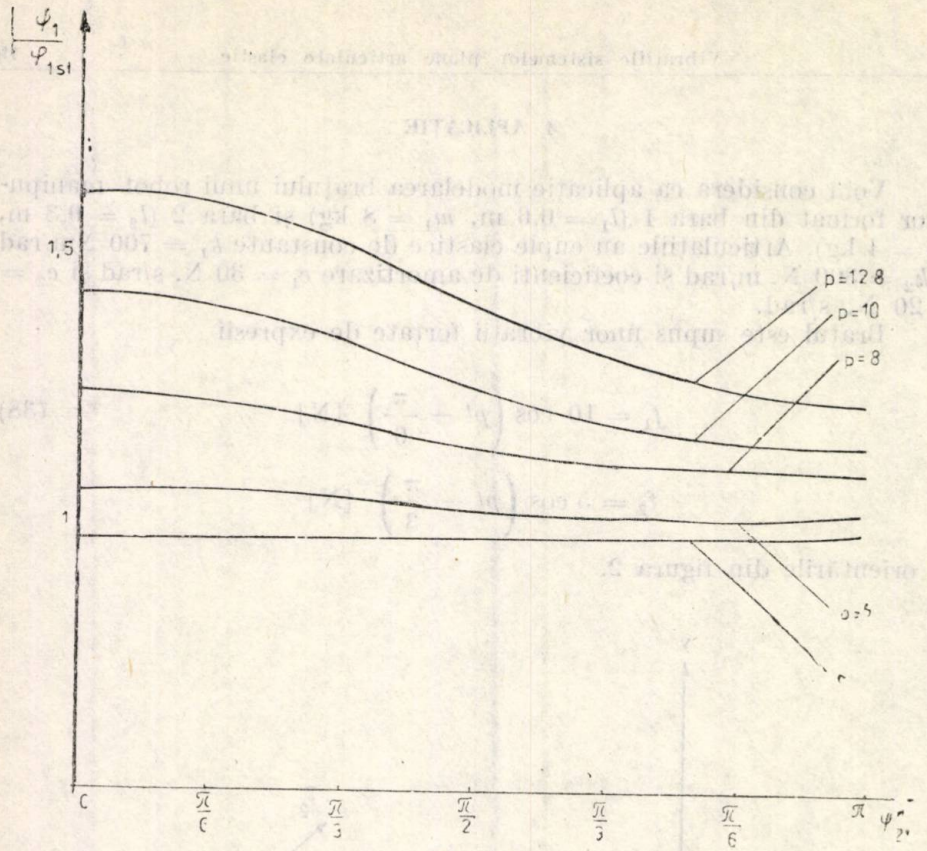

φ1
φ1st
1,5
1
p=12,8
p=10
p=8
p=5
0
π/6
π/3
π/2
π/3
π/6
π
φ21

Fig. 3

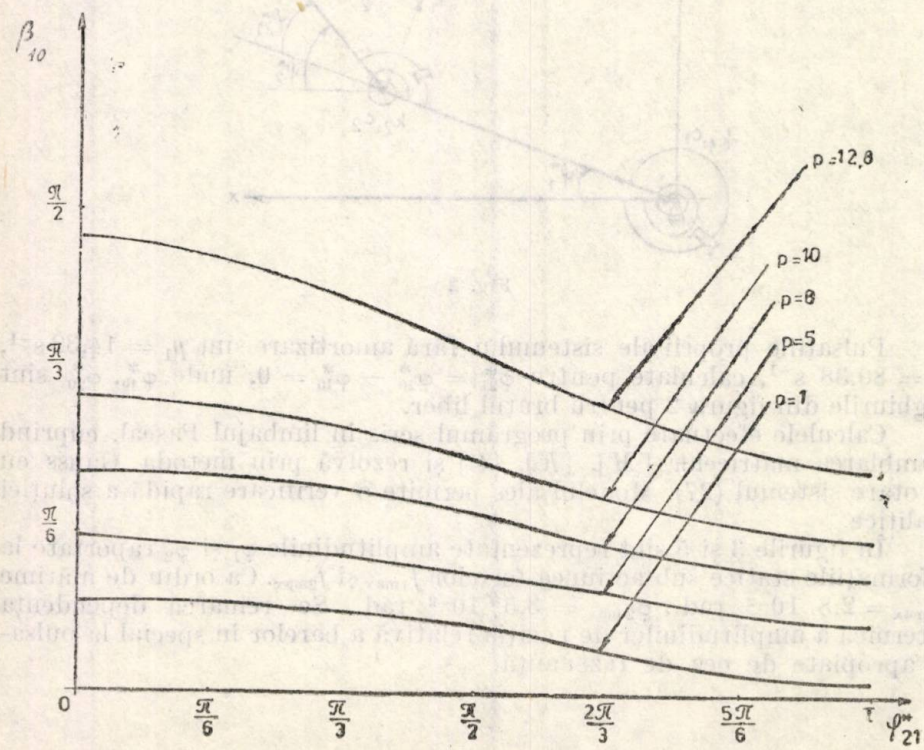

β10
π/2
π/3
π/6
0
p=12,8
p=10
p=8
p=5
p=1
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
φ21

Fig. 4

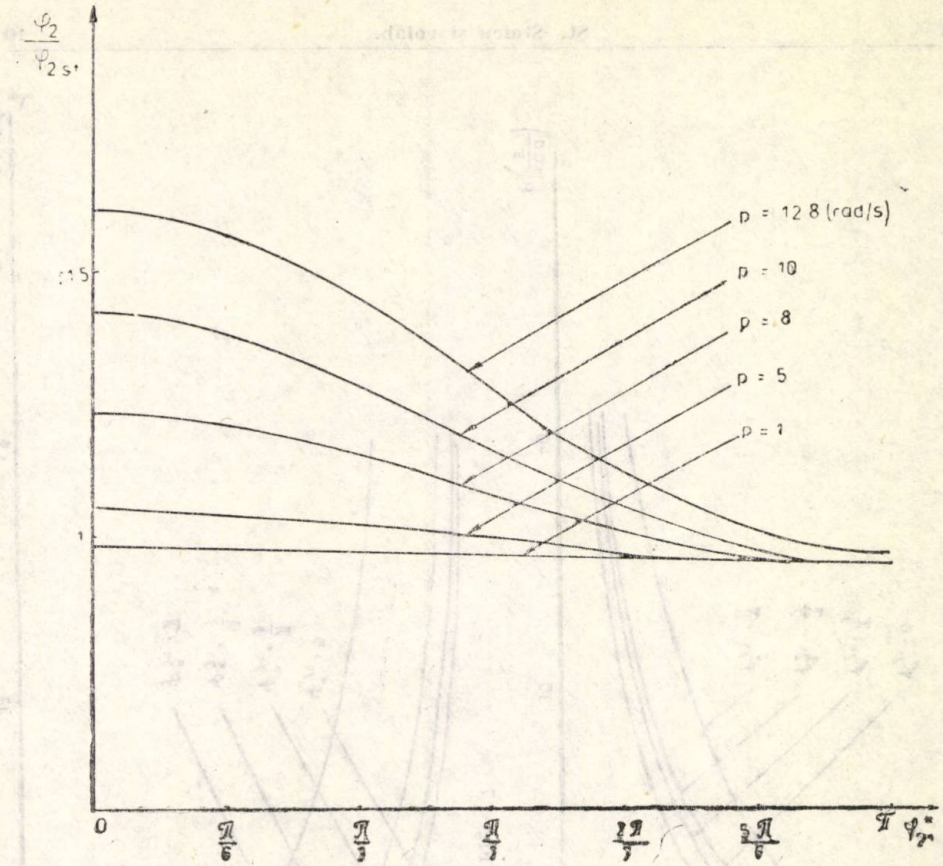

φ2 / φ2s
1.5
1
p = 12.8 (rad/s)
p = 10
p = 8
p = 5
p = 1
0
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
π

Fig. 5

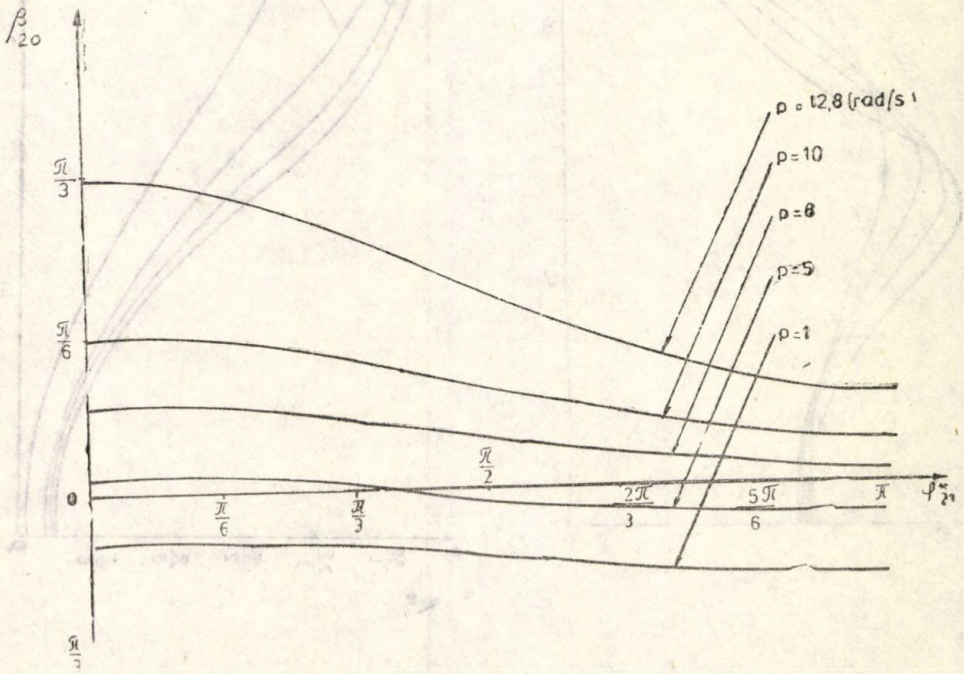

β20
π/3
π/6
0
π/2
π/6
π/3
2π/3
5π/6
π
p = 12,8 (rad/s)
p=10
p=8
p=5
p=1

Fig. 6

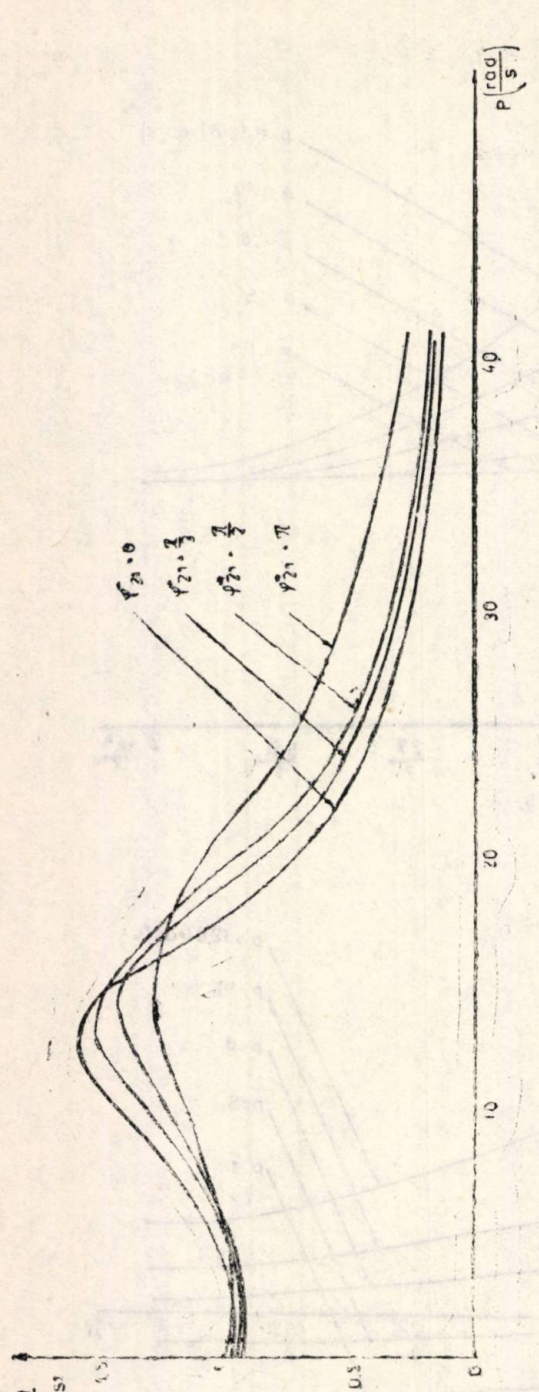


Fig. 7

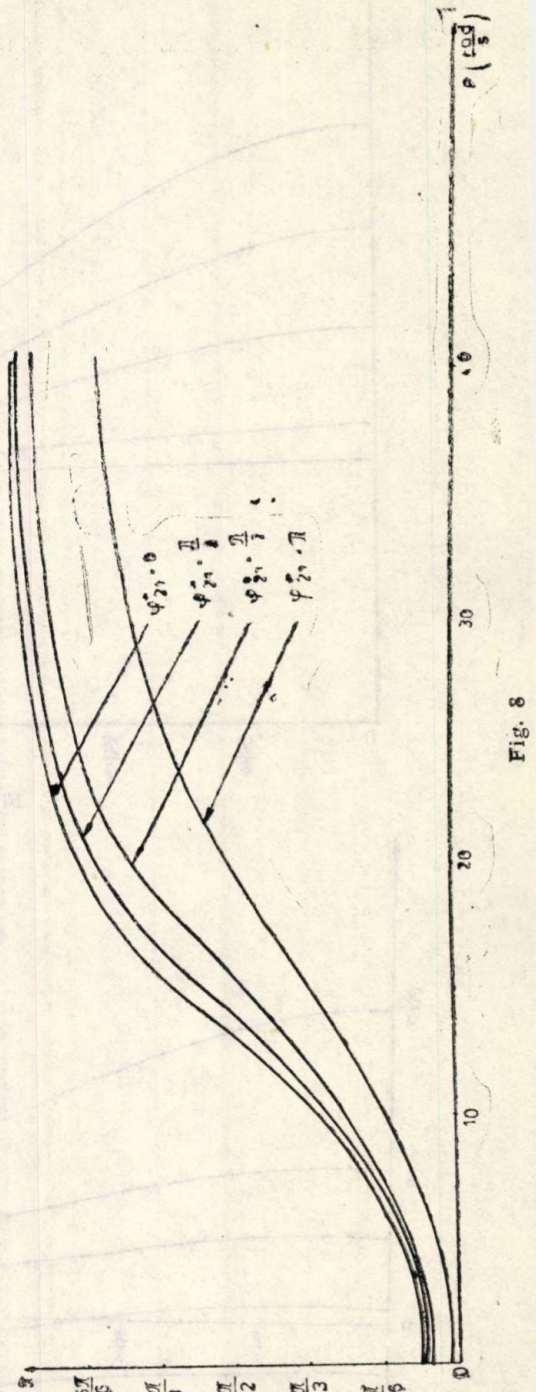


Fig. 8

Defazajele β_{10} și β_{20} sînt reprezentate în figurile 4 și 6.

Comportarea brațului la pulsații p superioare se poate urmări în figurile 7 și 8 prin curbele $\varphi_1/\varphi_{1\,\text{static}}$, respectiv β_{10} pentru φ_{21}^* cuprins între 0 și π.

Se remarcă scăderea amplitudinii maxime cu φ_{21}^*, iar poziția maximului determinat numeric se deplasează de la $p = 12{,}8$ la $p = 15{,}5$ odată cu creșterea unghiului φ_{21}^*.

Programul realizat permite analiza și optimizarea comportării la vibrații forțate a sistemelor de bare articulate.

Primit în redacție la 1 septemprie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. R. VOINEA, D. VOICULESCU, F. P. SIMION, *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Edit. Academiei, București, 1989.
2. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculul matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
3. C. ISPAS, F. P. SIMION, *Vibrațiile mașinilor unelte. Teorie și aplicații*, Edit. Academiei, București, 1986.
4. GH. SILAȘ, *Mecanica. Vibrații mecanice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1968.
5. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
6. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. III, Edit. tehnică, București, 1981.
7. GH. SILAȘ, I. GROȘANU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981.
8. M. RADEȘ, *On a frequency dependent eigen problem and its use in structural modelling*, Bulet. Instit. Politehnic București, seria mecanică (1984 — 1985).
9. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
10. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADEȘ, *Vibrații mecanice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
11. M. ATANASIU, *Mecanică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.

ASPECTE ALE MODELĂRII STRATULUI LIMITĂ AL ATMOSFEREI. I.*

de ADELINA GEORGESCU

Institutul de Matematică Aplicată, București

Lucrarea definește riguros și comentează diferite straturi limită : matematic, dinamic, termic și dinamic, dinamic turbulent, atmosferic.

§ 1. STRATUL LIMITĂ MATEMATIC

Să considerăm o problemă ce depinde de un parametru mic $\vec{\varepsilon} \in A \subset \mathbb{R}^k$ (A-un domeniu), scrisă operatorial sub forma

$$T(\vec{\varepsilon}, \vec{u}) = 0 \tag{1.1}$$

unde $T : B_1 \to B_2$ este un operator diferențial, B_1 și B_2 reprezintă două spații Banach de funcții, iar $\vec{u} \in B_1$ este funcția necunoscută $\vec{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{x}$ fiind variabila independentă, iar Ω-un domeniu al lui $\mathbb{R}^n$. Această problemă se mai poate scrie ca un sistem de m ecuații cu n funcții necunoscute $u_1, \ldots, u_n$ și un anumit număr de condiții la limită. Dacă $n = 1$ atunci ecuațiile sînt diferențiale ordinare, iar două $n \neq 1$ — ecuații cu derivate parțiale. Parametrul k — dimensional $\vec{\varepsilon}$ este mic în sensul normei din $\mathbb{R}^k$. O problemă (1.1) se numește *problemă de perturbații*. Multe dintre modelele matematice ale fenomenelor naturii, cum ar fi de exemplu, mișcarea fluidelor, sînt probleme de perturbație. Soluția lor depinde atît de variabila independentă $\vec{x}$ cît și de parametrul $\vec{\varepsilon}$; de aceea o astfel de soluție se va scrie ca $\vec{u}(\vec{\varepsilon}, \vec{x})$. În cele ce urmează vom considera cazul particular cînd ε este real, mic și strict pozitiv ; îl vom nota cu ε. Faptul că ε este strict pozitiv este de o importanță principală deoarece pentru $\varepsilon = 0$ *problema neperturbată* corespunzătoare

$$T(0, \vec{U}) = 0, \tag{1.2}$$

numită *problemă limită*, poate să nu aibă sens fizic, deci să nu corespundă unui fenomen real. În cazul general ε poate apare în toate ecuațiile și în toate condițiile la limită, dar sînt cazuri în care el apare numai în (unele) ecuații sau numai în (unele) condiții. În unele probleme de perturbații dependența de ε a lui T este cunoscută, pe cînd în altele (e.g. cînd apare în condiții în mod neexplicit (§ 6)) — necunoscută. Uneori această dependență este bună, netedă, alteori prezintă singularități. Interesul pentru dependența lui T de ε mai degrabă decît de $\vec{u}$ decurge din dorința de a găsi un șir de operatori și, corespunzător de probleme mai simple ale

* Bibliografia este dată în partea a doua a lucrării.

căror soluții să aproximeze asimptotic soluția $\vec{u}(\varepsilon, \vec{x})$ pentru $\varepsilon \to 0$, pînă la termeni de un anumit ordin de mărime. În problema de perturbații dată, termenii au diferite ordine de mărime pe cînd în aceste probleme simple de aproximație asimptotică toți termenii au același ordin. De aici rezultă importanța din punct de vedere numeric a utilizării aproximației asimptotice. De exemplu, ecuațiile de perturbație Navier-Stokes sau cele primitive, din dinamica atmosferei [2] în care parametrul mic ε poate fi o putere a numerelor adimensionale (Reynolds (Re), Prandtl, Rossby, Froude etc.) sînt ecuații complicate în care unii termeni sînt foarte mici, iar alții foarte mari pe cînd ecuațiile de aproximație asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$ ale lui Euler, Prandtl sau ale stratului limită atmosferic sînt ecuații mai simple, cu toți termenii comparabili și, în primă aproximație, dau aceeași informație ca și ecuațiile de perturbație. Domeniul de valabilitate al ecuațiilor de aproximație asimptotică este, de regulă, strict inclus în cel al ecuației de perturbație date Ω, pentru aproximarea asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$ a ecuației date și deci a soluției sale fiind necesare mai multe ecuații de aproximație asimptotică, fiecare în cîte un subdomeniu al lui Ω. De exemplu, ecuațiile Navier-Stokes sînt aproximate asimptotic pentru $\varepsilon \left(\equiv \frac{1}{\mathrm{Re}} \right) \to 0$ prin ecuațiile lui Prandtl lîngă perete și prin ecuațiile lui Euler la mari distanțe de perete așa cum funcția $e^{-\frac{x}{\varepsilon}(1-\varepsilon)}$ are drept primă aproximație asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$ pe 0 pentru x mari și pe $e^{-x/\varepsilon}$ pentru x mici de ordinul lui ε. Așa cum se vede și din ultimul exemplu, unele prime aproximații depind de ε altele nu.

Aproximația asimptotică [1] este un capitol al analizei care studiază comportamentul asimptotic al unei funcții $f(z)$ cînd $z \to z_0$, unde z_0 este un punct de acumulare al domeniului de definiție al lui f, i.e. comportamentul șirului valorilor $f(z)$ pentru $z \to z_0$. De cele mai multe ori z_0 nu aparține domeniului de definiție al lui f. În cazul particular cînd z este parametrul mic ε comportamentul asimptotic al lui f pentru $\varepsilon \to 0$ este dat de șirul valorilor $f(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \to 0$. Dacă f mai depinde și de o altă variabilă z_1 atunci z_1 joacă rolul unui parametru pentru problema de aproximație asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$. Specificarea „$\varepsilon \to 0$" este necesară deoarece se poate pune problema comportamentului asimptotic și pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0 > 0$ și de asemenea în raport cu z_1 pentru $z_1 \to z_{10}$. În cazul cînd f depinde de ε și $\vec{x}$, în general ne așteptăm ca $\vec{x}$ să influențeze comportamentul asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ al lui f și deci ca în diferite zone ale domeniului de definiție al lui f ca funcții de $\vec{x}$ acest comportament să fie diferit. Totuși există și cazuri cînd deși f depinde de $\vec{x}$ comportamentul asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ al lui f nu depinde de $\vec{x}$. De aceea, problemele de perturbații se împart în două mari clase : *probleme de perturbații singulare*, a căror soluție $\vec{u}(\varepsilon, \vec{x})$ are comportamente asimptotice pentru $\varepsilon \to 0$ diferite în zone diferite din Ω și *probleme de perturbații regulate*, a căror soluție $\vec{u}(\varepsilon, \vec{x})$ are un singur comportament asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ în tot Ω. Pentru precizarea acestor definiții să caracterizăm mai profund comportamentul asimptotic ca o informație suplimentară față de trecerea la limită și anume completarea acesteia din urmă cu

estimări ale ordinului de mărime ale termenilor seriei asimptotice care descrie acel comportament.

Numim *serie asimptotică după șirul asimptotic* $\{\delta_1(z), \delta_2(z), \ldots\}$ pentru $z \to z_0$ orice sumă finită sau infinită de forma $a_1\delta_1(z) + a_2\delta_2(z) + \ldots$ unde a_i pot fi constante sau funcții de alte variabile care însă să fie de ordinul $\mathcal{O}(1)$ pentru $z \to z_0$ adică să fie fixe cînd $z \to z_0$. Seriile asimptotice pot fi convergente sau divergente. O formă mai generală a unei astfel de serii asimptotice este $a_1(z, z_1) + a_2(z, z_1) + \ldots$ unde $a_i(z, z_1) = \mathcal{O}(\delta_i(z))$, $i = 1,2, \ldots$ pentru $z \to z_0 \cdot \{\delta_1(z), \delta_2(z), \ldots\}$ se zice *șir asimptotic* pentru $z \to z_0$ dacă $\delta_{i+1}(z) = o(\delta_i(z))$ pentru $z \to z_0$, deci ordinul de mărime al termenilor succesivi ai termenilor șirului descrește. Reamintim că două funcții $f_1(z)$ și $f_2(z)$ definite (pentru mai mare generalitate) într-un sector S_Δ al planului complex $\mathbb{C}$ sînt în relația $\mathcal{O}$ pentru $z \to z_0$ sau, echivalent sînt de același ordin de mărime pentru $z \to z_0$, dacă există o constantă A astfel încît $|f_1(z)| \leqslant A f_2(z)$ sau, cînd $f_i(z) \neq 0$ pe S_Δ, dacă $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{|f_1(z)|}{|f_2(z)|} = A$ și scriem aceasta ca $f_1(z) = O(f_2(z))$ pentru $z \to z_0$ sau, cînd $A = 1$, $f_1(z) \sim f_2(z)$ pentru $z \to z_0$. Analog f_1 și f_2 sînt în relația o pentru $z \to z_0$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, există o vecinătate U_ε a lui z_0, astfel încît $|f_1(z)| < \varepsilon |f_2(z)|$ pentru orice $z \in U_\varepsilon \cap S_\Delta$ iar cînd $f_2(z) \neq 0$ pe U_ε, dacă $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{|f_1(z)|}{|f_2(z)|} = 0$. În acest caz scriem $f_1(z) = o(z)$ sau $f_1(z) << f_2(z)$ pentru $z \to z_0$. Cum $f_1(z) = o(f_2(z))$ pentru $z \to z_0$ implică $f_1(z) = \mathcal{O}(f_2(z))$ pentru $z \to z_0$ (pentru aceasta fiind suficient să se ia $A = 0$), se convine să se spună că $f_1(z) = \mathcal{O}_S(f_2(z))$ pentru $z \to z_0$ cînd $f_1(z) = \mathcal{O}(f_2(z))$, dar $f_1(z) \neq o(f_2(z))$ pentru $z \to z_0$. De regulă, indicele S nu se mai scrie, iar în aplicații se subînțelege că $\mathcal{O}$ este, de fapt, $\mathcal{O}_S$. O funcție $f(z)$ se zice că are *dezvoltarea asimptotică* pentru $z \to z_0$ $f_1(z) + f_2(z) + \ldots$ sau, în particular, $a_1\delta_1(z) + a_2\delta_2(z) + \ldots$ după șirul asimptotic $\{\delta_1(z), \delta_2(z), \ldots\}$ pentru $z \to z_0$ dacă $f(z) - \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(z) = o(f_N(z))$ pentru $z \to z_0$. Se poate întîmpla ca, chiar în cazul în care este convergentă, seria asimptotică după care se dezvoltă o funcție să nu tindă către acea funcție, deși f și f_1 au aceeași limită pentru $z \to z_0$. Cu toate acestea, dezvoltarea asimptotică a unei funcții dă posibilitatea aproximării asimptotice a acelei funcții, structurînd pe f după ordinul diferitelor funcții de comparație δ_i ale șirului asimptotic, $a_1\delta_1$ extrăgînd partea cea mai mare (în sensul de ordin cel mai mare) a lui $f(z)$, $a_2\delta_2$ extrăgînd partea cea mai mare din restul $f - a_1\delta_1$ și așa mai departe, așa cum de exemplu s-ar descompune o cantitate de materie în porțiuni de ordinul unui munte, al unei stînci, al unei pietricele etc. Totuși, în cazul seriilor asimptotice nu este vorba de o structurare după mărime, ci după ordinul de mărime, deci de o descriere calitativă, comparativă, privind viteza de variație a raportului f/δ_1, $(f - a_1\delta_1)/\delta_2$ etc. De exemplu, cantitativ, x și x^2 pentru x mici tinzînd de zero sînt mici, dar $x^2 \ll x$ adică $x^2 = o(x)$ pentru $x \to 0$ deoarece raportul $x^2/x \to 0$ pentru $x \to 0$. Spre deosebire de aceasta, în aplicații se zice de exemplu că 5 este de un ordin de mărime mai mic decît 40, deci aici este, de fapt vorba de mărimea propriu-zisă și nu de tinderea la zero a unui raport. Pentru anumiți x mici se poate ca $x \cdot 10^5$ să fie mai mică ca x^2, dar funcția $x \cdot 10^5$ continuă să fie mult mai mare ca

funcția x^2 i.e. $x^2 = o(10^5\, x)$ pentru $x \to 0$. Înțelegerea acestei deosebiri este esențială în înțelegerea noțiunilor de strat limită matematic și fizic: *stratul limită dinamic* va fi o zonă din domeniul de curgere al unui fluid de o anumită grosime δ_d și anume definită de condiția ca la frontiera superioară a acestei zone viteza din zonă să difere de cea din afara zonei cu mai puțin de 1% [3]. Analog, stratul limită termic este zona de lîngă frontiera unui mediu continuu, astfel încît la frontiera exterioară a acestei zone temperatura să difere de cea din exterior cu mai puțin de 1%. Grosimea acestui strat va fi notată cu δ_T. Să observăm totuși că aceste grosimi ale unui strat limită fizic nu tind la zero deoarece, de fapt, fenomenul de curgere sau de propagare a căldurii se consideră a avea loc la o valoare dată a parametrului fizic ce definește pe ε. Aici apare rațiunea notației $\vec{u}_\varepsilon(\vec{x})$ pentru soluția lui (1.1), notație care sugerează o familie de soluții indexate după ε, corespunzătoare familiei de probleme (1.1), fiecărei valori a lui ε corespunzîndu-i o anumită problemă a familiei (1.1). Rezultă că aceea ce exprimăm prin „comportamentul soluției $\vec{u}(\varepsilon, \vec{x})$ a lui (1.1) pentru $\varepsilon \to 0$" înseamnă „comportamentul soluțiilor familiei de probleme de tip (1.1) cînd $\varepsilon \to 0$". Prin urmare δ_m se referă la tinderea grosimilor straturilor limită matematice corespunzătoare diferitelor valori ale lui ε pentru $\varepsilon \to 0$ pe cînd δ_d și δ_T se subînțelege că sînt determinate pentru un ε fixat.

Să presupunem că, comportamentul asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ al unei probleme de perturbații (1.1) este descris de seria asimptotică

$$\vec{u}(\varepsilon, \vec{x}) \sim \vec{U}_0(\vec{x}) + \varepsilon \vec{U}_1(\vec{x}) + \varepsilon^2 \vec{U}_2(\vec{x}) + \ldots, \text{ pentru } \varepsilon \to 0 \quad (1.3)$$

după șirul asimptotic $\{1, \delta, \delta^2, \ldots\}$ pentru $\varepsilon \to 0$. Această serie se numește *dezvoltare asimptotică regulată* deoarece dacă $\vec{x}$ este considerat drept parametru, iar ε variabila independentă, atunci această dezvoltare este cea a unei funcții analitice (deci regulate) în jurul lui $\varepsilon = 0$. Cu ajutorul dezvoltării regulate se poate defini riguros noțiunea de problemă de perturbații regulate ca fiind aceea problemă de perturbație a cărei soluție are un comportament asimptotic dat de dezvoltarea asimptotică regulată (1.3) în tot Ω. Analog o problemă (1.1) va fi de perturbații singulare dacă pentru descrierea comportamentului asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ al soluției sale nu este suficientă numai dezvoltarea regulată, ci cel puțin încă una. După alte definiții mai generale problema (1.1) este de perturbații singulare dacă în diferite zone din Ω comportamentul asimptotic al soluției $\vec{u}$ este dat cu ajutorul unor dezvoltări asimptotice diferite fără a se menționa dacă vreuna dintre ele este sau nu regulată. Există mai multe tipuri de probleme de perturbații singulare fiecare caracterizată de soluții ce posedă un anumit tip de comportament asimptotic și pentru deducerea căruia se folosește o anumită metodă de perturbații singulare. În general din scrierea problemei este greu să se spună dacă acea problemă este de perturbații regulate sau singulare și dacă este de perturbații singulare de care anume tip este. Cele mai bine studiate *probleme de pertubații singulare* sînt cele de *tip strat limită* caracterizate de aceea că soluția lor are un

comportament asimptotic regulat dat de (1.3) în exteriorul unui strat limită matematic și un altul dat de seria

$$\vec{u}(\varepsilon, \vec{x}) \sim \vec{u}_0(\hat{\vec{x}}) + \varepsilon\vec{u}_1(\hat{\vec{x}}) + \varepsilon^2\vec{u}_2(\hat{\vec{x}}) + \ldots, \text{ pentru } \varepsilon \to 0 \quad (1.4)$$

în interiorul stratului limită, unde $\hat{\vec{x}} = \vec{x}/\varepsilon$ se numește *variabila interioară* sau de tip *strat limită*. Dintre problemele (1.1) de tip strat limită fac parte acelea în care parametrul apare numai în ecuații și anume pe lîngă derivata de ordin maxim, așa cum este ecuația Navier-Stokes.

Stratul limită matematic este zona de lîngă frontiera lui Ω în care soluția problemei de perturbație are o variație rapidă. Dacă această variație rapidă are loc într-o zonă din jurul unui (unor) punct(e) din interiorul lui Ω atunci acea zonă se numește *strat interior*. Straturi interioare apar și în unele probleme de dinamica atmosferei [4]. Cînd în loc de $\vec{x}$ avem timpul t, stratul limită matematic pentru $\varepsilon \to 0$ care apare lîngă $t = 0$ se numește strat inițial. El apare în probleme în care soluția problemei de perturbație singulară variază brusc la începutul evoluției descrisă de acea problemă și deci are o altă scară temporală decît în restul timpului.

Introducînd formal (1.3) și (1.4) în (1.1) (eventual transcrisă în variabila $\hat{\vec{x}}$) și egalînd coeficienții acelorași puteri ale lui ε în ambii membri ai ecuațiilor și condițiilor se obțin probleme ale căror soluții sînt $\vec{U}_i$ și $\vec{u}_i$ numite *probleme de aproximație asimptotică exterioară* și respectiv *interioară* de ordin i. Teoria perturbației studiază tocmai deducerea unor astfel de probleme de aproximație asimptotică; cu ajutorul soluțiilor lor se poate descrie complet prin seriile (1.3) și (1.4) comportamentul asimptotic al soluției unei probleme de perturbație singulară de tip strat limită. În cazul simplu al dezvoltării asimptotice a unei funcții cunoscute după un șir asimptotic, comportamentul pentru $\varepsilon \to 0$ al funcției (în general complicate) era exprimat cu ajutorul funcțiilor care constituiau termenii șirului, funcții care erau mult mai simple decît funcția dată. Analog, în teoria perturbației facem tot o aproximație (asimptotică) reducînd rezolvarea problemei, deci găsirea lui $\vec{u}$ la găsirea soluțiilor $\vec{U}_i$ și $\vec{u}_i$ ale unor probleme mai simple. De aceea, teoria perturbației este una din cele două părți principale ale teoriei aproximației asimptotice (prima fiind analiza asimptotică care privește studiul șirurilor, seriilor și dezvoltărilor asimptotice și metodele de găsire a dezvoltărilor asimptotice pentru funcții ce admit o reprezentare integrală).

Metoda după care comportamentul asimptotic al soluției unei probleme de perturbații singulare de tip strat limită este dat cu ajutorul seriilor (1.3) și (1.4) se numește metoda dezvoltărilor asimptotice exterioare și interioare racordate. După scrierea lui (1.3) și (1.4) și găsirea ecuațiilor pe care le satisfac $\vec{U}_i$ și $\vec{u}_i$ este necesară deducerea unor condiții la limită adiționale. Într-adevăr, presupunînd că stratul limită se află lîngă peretele $x_2 = 0$, iar Ω este exteriorul unui corp astfel încît Ox_2 este normală la corp rezultă că frontiera exterioară a stratului limită matematic este $x_2 = \delta_m(\varepsilon, x_1, x_3, \ldots, x_m)$, grosimea acestui strat fiind chiar $\delta_m(\varepsilon, x_1, x_3, \ldots x_m) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \to 0$. Înseamnă că dezvoltarea exterioară (1.3)

este valabilă pentru $x_2 = \mathcal{O}(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$ (deci x_2 fixaţi şi nu mici), iar cea interioară (1.4) este valabilă pentru $x_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \to 0$ i.e. pentru $\hat{x}_2 = \mathcal{O}(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$. În acest fel n-am spus nimic despre comportamentul asimptotic al lui $\vec{u}$ pentru x_2 intermediari între aceste două zone. Pe de altă parte este firesc că dacă dorim ca (1.3) să aproximeze asimptotic pe $\vec{u}$ pentru $x_2 = \mathcal{O}(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$ va trebui să deducem pentru $\vec{U}_i$ condiţii la limită din cele de la mari distanţe ale lui $\vec{u}$, iar cum (1.4) trebuie să aproximeze asimptotic pe $\vec{u}$ pentru $x_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \to 0$ va trebui ca $\vec{u}_i$ să satisfacă condiţiile la $x_2 = 0$ corespunzătoare celor pe care le satisface $\vec{u}$ acolo. Dar, în felul acesta, pe de o parte nu spunem nimic despre comportamentul asimptotic al lui $\vec{u}$ între stratul limită şi zona de la mari distanţe de corp, iar pe de alta nu avem suficiente condiţii la limită care să determine pe $\vec{U}_i$ şi $\vec{u}_i$. De aceea, se racordează cele două serii (1.3) şi (1.4) după ce în prealabil sumele lor au fost prelungite, astfel încît aceste sume să fie definite şi pe zona intermediară dintre cele două zone. În această zonă va trebuie să găsim condiţiile la limită suplimentare care să facă posibilă determinarea lui $\vec{U}_i$ şi $\vec{u}_i$ şi care vor conduce la formularea completă a problemelor de aproximaţie asimptotică. Cum din problema (1.1), în zona intermediară nu avem condiţii fizice (acestea exprimînd legătura fenomenului din Ω cu exteriorul lui Ω şi deci fiind puse la $x_2 = 0$ şi $x_2 \to \infty$) va trebui să deducem aceste condiţii din racordarea celor două serii. Există mai multe reguli de racordare numite principii. Dintre acestea vom prezenta *principiul de racordare* $n \times m$ folosit în metoda dezvoltărilor asimptotice interioare şi exterioare racordate. El afirmă : trunchind dezvoltarea exterioară (1.3) la primii m termeni, dezvoltînd suma obţinută după o serie interioară şi reţinînd din aceasta primii n termeni trebuie să obţinem aceleaşi funcţii de ε şi $\vec{x}$ ca aceea găsită trunchind dezvoltarea interioară (1.4) la primii n termeni, dezvoltînd suma obţinută după o serie exterioară şi reţinînd din aceasta primii m termeni. Cel mai des se foloseşte principiul de racordare 1×1 care revine la

$$\vec{U}_0(0) = \vec{u}_0(\infty) \tag{1.5}$$

ceea ce constituie egalitatea a două valori (în acest caz funcţiile din principiul de racordare sînt funcţii constante) care vor furniza condiţiile suplimentare, necesare pentru determinarea lui $\vec{u}_0(\vec{x})$ (pe exemplele din §§ 2 şi 3 se va vedea că pentru determinarea lui $\vec{U}_0$ nu erau necesare condiţii suplimentare faţă de acelea din (1.1)). Problema pe care o satisface $\vec{U}_0$ se numeşte *problema redusă*, uneori numindu-se la fel şi problema de primă aproximaţie asimptotică interioară a cărei soluţie este $\vec{u}_0$. Valoarea $\vec{U}_0(0)$ va servi şi ca reprezentare asimptotică a lui $\vec{u}$ în zona intermediară.

O trăsătură importantă a seriilor asimptotice divergente (aşa cum este majoritatea seriilor asimptotice) este aceea că realizează o aproximaţie optimă pentru un număr foarte mic de termeni ai dezvoltării ; de aceea rareori se consideră patru termeni ; de obicei se ia numai primul termen numit *termenul principal*. El conţine cea mai importantă parte a comportamentului asimptotic. Dezvoltarea asimptotică în care se opreşte doar primul termen se numeşte *reprezentare asimptotică*.

O altă trăsătură principală a dezvoltărilor asimptotice este aceea că ele completează informația despre soluție lîngă puncte z_0 sau pentru valori $\varepsilon = 0$ neadmise în problema dată, în care soluția poate să nici nu existe, problema nefiind definită. În acele puncte și pentru acele valori soluția nu poate fi investigată nici numeric, nici cu metode de analiză obișnuită. De aceea, *teoria asimptotică* este *complementară studiului numeric și analitic.*

În sfîrșit, problemele de aproximație asimptotică au proprietatea de a conține *termeni de același ordin de mărime* și prin aceasta ele sînt preferate în calculul numeric spre deosebire de problema de perturbații, ai cărei termeni fiind de ordine de mărime diferite, conduce la dificultăți deosebite de calcul.

Modelul Navier-Stokes care pentru ν mici guvernează mișcarea fluidelor reale puțin vîscoase în jurul corpurilor este o problemă de perturbații singulare de tip strat limită în care parametrul mic este $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ dacă numărul Re al lui Reynolds este mare. În paragraful 3 vom arăta că modelul Euler și Prandtl sînt modele de primă aproximație asimptotică exterioară și respectiv interioară pentru modelul Navier-Stokes, cu ajutorul lor putîndu-se construi comportamentul asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ complet al soluției modelului Navier-Stokes. Ele nu sînt modele fizic admise, ci doar de aproximație asimptotică pentru modelul Navier-Stokes.

§ 2. EXEMPLUL MODEL AL LUI PRANDTL

Pentru ușurarea înțelegerii deducerii modelelor Euler și Prandtl din modelul Navier-Stokes vom analiza o problemă la limită pentru o ecuație diferențială ordinară a cărei soluție are același tip de comportament asimptotic ca și soluția modelului Navier-Stokes pentru $\nu \to 0$.

Fie problema la limită a lui Prandtl

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0, \quad t \in (0, \infty) \tag{2.1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \tag{2.3}$$

unde masa $m > 0$ este un parametru mic, $k, c > 0$ sînt două constante date, fixate, $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x = x(t)$ este funcția necunoscută, iar t este variabila independentă. Comportamentul asimptotic pentru $m \to 0$ al soluției $x(m, t)$ a problemei (2.1) — (2.3) este arătat în figura 2.1 : pentru fiecare m problema are o soluție, curbă integrală în planul (t, x), aceste curbe tinzînd

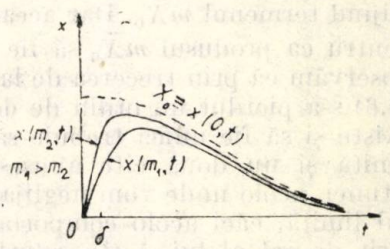


Fig. 2.1

pentru t mari ($t = \mathcal{O}(1)$ pentru $m \to 0$) către o anumită curbă $X_0(t) = Ae^{-ck^{-1}t}$ în timp ce pentru t mici ($t = \mathcal{O}(m)$ pentru $m \to 0$) ele au o variație extrem de rapidă pentru ca pe un interval de variație al lui t extrem de mic ($\delta(m) = \mathcal{O}(m)$ pentru $m \to 0$) x să-și schimbe ordinul de mărime (de la $x(m, 0) = 0$ la $x(m, t) = \mathcal{O}(1)$ pentru $t = \mathcal{O}(1)$ pentru $m \to 0$). Fiecare curbă integrală are două porțiuni cu comportament asimptotic pentru $m \to 0$ distinct: porțiunea de la $t = \mathcal{O}(1)$ pentru $m \to 0$ lent variabilă și care tinde către porțiunea lui X_0 corespunzătoare acelor t și o porțiune de lîngă $t = 0$ avînd variație rapidă și fiind apropiată de curba $x_0\left(\frac{t}{m}\right) = A(1 - e^{-t/m})$, apropierea dintre curba integrală $x(m, t)$ și curba $x_0(t/m)$ fiind cu atît mai mare cu cît m este mai mic. Pe $[0, \infty)$ un astfel de comportament nu va putea fi descris numai cu ajutorul unei singure dezvoltări asimptotice, ci cu ajutorul dezvoltării exterioare (regulate) (care descrie comportamentul asimptotic regulat)

$$x(m, t) \sim X_0(t) + mX_1(t) + m^2X_2(t) + \dots \tag{2.4}$$

pentru $t = \mathcal{O}(1)$, pentru $m \to 0$ și a celei interioare (unde $\hat{t} = kt/m$) (care descrie comportamentul asimptotic de tip strat limită, stratul limită matematic fiind intervalul $[0, \delta(m)]$)

$$x(m, t) \equiv x(m, m\hat{t}) \sim x_0(\hat{t}) + mx_1(\hat{t}) + m^2x_2(\hat{t}) + \dots \tag{2.5}$$

pentru $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$, pentru $m \to 0$. Aceste dezvoltări vor trebui racordate în zona dintre stratul limită și zona exterioară $t = \mathcal{O}(1)$. Această zonă intermediară se găsește dincolo de frontiera de sus $t = \delta$ a stratului limită sub zona exterioară $t = \mathcal{O}(1)$ pentru $m \to 0$. În acest fel se va acoperi tot intervalul de definiție pentru t și anume $t \in [0, \infty)$.

Ecuațiile pe care le satisfac X_0 și X_1 se obțin introducînd formal pe (2.4) în (2.1) și egalînd termenii de același ordin. Ele sînt

$$k\dot{X}_0 + cX_0 = 0, \tag{2.6}$$

$$k\dot{X}_1 + cX_1 = -\ddot{X}_0 \tag{2.7}$$

și ele pot fi definite pentru $t \in (0, \infty)$ deși cu ajutorul lor descriem comportamentul asimptotic al lui $x(m, t)$ doar pentru $t = \mathcal{O}(1)$ pentru $m \to 0$. Ecuația (2.6) este chiar ecuația limită a problemei de perturbații singulare de tip strat limită (2.1) — (2.3). Ea se mai numește și *ecuația redusă*. Formal această ecuație se obține punînd $m = 0$ în (2.1), deci neglijînd termenul $m\ddot{X}_0$. Dar această neglijare are loc cînd $\ddot{X}_0$ nu este mare pentru ca produsul $m\ddot{X}_0$ să fie mic, deci cînd X_0 este lent variabilă. Să observăm că prin trecerea de la ecuația de perturbație (2.1) la cea redusă (2.6) s-a pierdut un ordin de derivare, deci pentru ca soluția lui (2.6) să existe și să fie unică trebuie să mai adăugăm doar o singură condiție la limită și nu două cîte avusese problema de perturbație (2.1) — (2.3). Atunci, acolo unde vom neglija condiția la limită va trebui să avem stratul limită, căci acolo comportamentul asimptotic al lui $x(m, t)$ va fi diferit de cel al lui $X_0(t)$, soluția $X_0(t)$ neputîndu-și trage informații din condiția la limită neglijată, așa cum își trăgea $x(m, t)$. Figura 2.1 arată

că stratul limită este lîngă $t = 0$, astfel că pentru $X_0(t)$ impunem condiția de la mari distanțe

$$\lim_{t\to\infty} X_0(t) = 0. \tag{2.8}$$

Problema (2.6), (2.8) se numește *problema redusă*; ea furnizează o primă aproximație asimptotică exterioară pentru $x(m, t)$. Formularea asimptotică bazată pe dezvoltarea exterioară (2.4) și în particular pe problema redusă se numește *formularea naivă* deoarece prima idee care apare cînd trebuie să stabilim comportamentul asimptotic al soluției unei probleme de perturbații este recurgerea la problema redusă. Să facem distincție între problema limită și cea redusă. În ambele, ecuația se obține formal din ecuația de perturbație pentru $m = 0$, dar condițiile la limită sînt diferite: în problema limită ele se obțin tot formal pentru $m = 0$ pe cînd în cea redusă se aleg doar unele dintre condițiile problemei de perturbație. În particular, în cazul problemei (2.1) — (2.3) problema limită ar fi avut doar soluția identic nulă. Aceeași soluție ar fi avut și problema formată din (2.6) și (2.2), aceasta constituind încă un motiv pentru atașarea condiției (2.8) la ecuația redusă. Pentru probleme de perturbație mai complicate, pentru stabilirea poziției stratului limită (și deci alegerea condițiilor din problema redusă) se recurge la o rezolvare numerică estimativă. Atragem atenția că nu orice problemă de perturbații singulare este aproximată sau este bine aproximată asimptotic pentru $\varepsilon \to 0$ cu ajutorul dezvoltării regulate din formularea naivă. Există așa-zisa *formulare în medie* în care drept prim termen în (1.3) se ia o anumită medie a lui $\bar{u}(\varepsilon, \bar{x})$; se dovedește că această formulare furnizează aproximații asimptotice pentru soluția $\bar{u}$ pe domenii de variație a lui $\bar{x}$ mai mari decît cele corespunzătoare formulării naive.

Soluția problemei reduse (2.6), (2.8) este $X_0(t) = Ae^{-ck^{-1}t}$ unde A este o constantă arbitrară care nu se va putea determina, problema (2.1) — (2.3) fiind liniară. Această constantă multiplicativă va apare în toți X_i și x_i. Să determinăm acum pe $x_0(\hat{t})$. Pentru aceasta scriem mai întîi pe (2.1) în variabilele m și $\hat{t}$ sub forma

$$\frac{k^2}{m}\frac{\mathrm{d}^2x(m, m\hat{t})}{\mathrm{d}\hat{t}^2} + \frac{k^2}{m}\frac{\mathrm{d}x(m, m\hat{t})}{\mathrm{d}\hat{t}} + cx(m, m\hat{t}) = 0; \tag{2.9}$$

introducînd în aceasta pe (2.5) găsim

$$\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}\hat{t}^2} + \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\hat{t}} = 0, \ \hat{t} \in (0, \infty) \tag{2.10}$$

$$k^2\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}\hat{t}^2} + k^2\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\hat{t}} = -cx_0. \tag{2.11}$$

Cum $x_i(\hat{t})$ vor descrie comportamentul asimptotic al lui $x(m, t)$ în stratul limită, la (2.10) și (2.11) vom atașa condiția (2.2), dar mai avem

nevoie de încă una pe care o vom obține din racordare. Cum racordarea 1×1 revine la $X_0(0) = x_0(\infty)$ rezultă că x_0 satisface problema la limită formată din (2.10), (2.2) și

$$x_0(\infty) = A \tag{2.12}$$

a cărei soluție este $x_0(\hat{t}) = A(1 - e^{-\hat{t}})$ sau, în variabilele m și t, $x_0(kt/m) = A(1 - e^{-kt/m})$. Pînă acum aproximarea asimptotică pentru $m \to 0$ a lui $x(m, t)$ este

$$x(m,t) \sim \begin{cases} Ae^{-ck^{-1}t} + \ldots, & \text{pentru } t = \mathcal{O}(1) \text{ pentru } m \to 0 \\ A + \ldots, & \text{pentru } t \text{ între } t = \mathcal{O}(1) \text{ și } t = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ pentru } m \to 0 \\ A(1 - e^{kt/m}) + \ldots, & \text{pentru } t = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ pentru } m \to 0. \end{cases}$$

O aproximație asimptotică uniform valabilă pe tot $t \in [0, \infty)$ va fi atunci suma dintre dezvoltarea exterioară și interioară din care se scade cea intermediară, deci

$$x(m,t) \sim Ae^{-ck^{-1}} - Ae^{-\hat{t}} + \ldots$$

Pentru deducerea lui $X_1(t)$ la (2.7) atașăm condiția (2.3). Din (2.7) și (2.3) găsim $X_1(t) = -Ac^2k^{-3}te^{-ck^{-1}t}$. Să determinăm acum pe $x_1(\hat{t})$ atașînd la (2.11) condiția (2.2) și condiția obținută aplicînd un principiu de racordare 2×2. Astfel $X_0(t) + mX_1(t) = Ae^{-ck^{-2}}mt[1 - c^2k^{-4}m\hat{t}] \sim A(1 - ck^{-2}\hat{t}m)\,(1 - c^2k^{-4}m\hat{t}) \sim A[1 - m\hat{t}ck^{-2}(1 + ck^{-2})]$. Soluția lui (2.11), (2.2) este $x_1(\hat{t}) = B(1 - e^{-\hat{t}}) - \dfrac{cA}{k^2}\,\hat{t}\,(e^{-\hat{t}} + 1)$, unde B este o constantă încă nedeterminată. Atunci $x_0(\hat{t}) + mx_1(\hat{t}) = A(1 - e^{-\hat{t}}) + mB(1 - e^{-\hat{t}}) - \dfrac{mcA}{k^2}\,\hat{t}\,(e^{-\hat{t}} + 1) = (A + mB)\,(1 - e^{-kt/m}) - \dfrac{mcA}{k^2} \times \dfrac{kt}{m}\,(1 + e^{-kt/m}) \sim A + mB - \dfrac{cA}{k}\,t = A\left[1 + m\,\dfrac{B}{A} - \dfrac{c}{k} \cdot \dfrac{m\hat{t}}{k}\right]$.

Deoarece parantezele subliniate nu reprezintă aceleași funcții de m și $\hat{t}$ rezultă că principiul de racordare 2×2 nu are loc. De aceea, să impunem principiul de racordare 2×1. Atunci găsim $A(1 - ck^{-2}\hat{t}m) = A(1 + mBA^{-1} - ck^{-2}\,\hat{t}m)$ de unde rezultă $B = 0$, deci $x_1(\hat{t}) = -cAk^{-2}\hat{t}(1 + e^{-\hat{t}})$, ceea ce conduce la următoarea aproximație

$$x(m,t) \sim \begin{cases} Ae^{-ck^{-1}t} + \ldots, & \text{pentru } t = \mathcal{O}(1) \text{ pentru } m \to 0 \\ A(1 - ck^{-2}\hat{t}m) + \ldots, & \text{pentru } t \text{ între } t = \mathcal{O}(1) \text{ și } t = \mathcal{O}(\varepsilon) \\ & \text{pentru } m \to 0 \\ A(1 - e^{-\hat{t}}) - mAck^{-2}\hat{t}(1 + e^{-\hat{t}}) + \ldots & \text{pentru } t = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ pentru} \\ & m \to 0 \end{cases}$$

și la aproximația asimptotică uniform valabilă pe $[0, \infty)$

$$x(m, t) \sim Ae^{-ck^{-1}t} - Ae^{-\hat{t}} - mAck^{-2}\hat{t}e^{-\hat{t}} + \ldots$$

Soluția exactă a problemei (2.1) — (2.3) este $x(m, t) = A(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ unde $\lambda_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}$, astfel că în acest caz particular se poate constata că dezvoltînd direct această expresie exactă în serii asimptotice pentru $m \to 0$ în stratul limită și în afara lui se regăsesc formulele deduse mai sus cu ajutorul metodei dezvoltărilor asimptotice exterioare și interioare racordate. Problema (2.1) — (2.3) este liniară, iar ecuațiile pentru X_i completate cu condiția (2.3) admit (abstracție făcînd de o constantă multiplicativă) soluție unică. Rezultă că în acest caz toată dezvoltarea exterioară se poate determina fără vreo informație asupra celei interioare, în schimb pentru dezvoltarea interioară avem mereu nevoie de informații asupra celei exterioare pe care le furnizăm prin condițiile de racordare. În cazul general al problemelor neliniare deja X_2 va depinde de x_0, astfel încît termenii celor două dezvoltări (în afara lui X_0) se vor influența reciproc.

§ 3. MODELUL LUI PRANDTL AL MIȘCĂRII ÎN STRATUL LIMITĂ DINAMIC

Să considerăm modelul Navier-Stokes care descrie mișcarea staționară, plană a unui fluid vîscos, incompresibil, în cîmp constant de temperatură, în absența forțelor masice, în jurul unui corp imobil, de-a-lungul căruia să luăm coordonata x și normal la suprafața sa — coordonata y. Suprafața corpului are atunci ecuația $y = 0$. Acest model este reprezentat prin următoarea problemă la limită

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \quad (x, y) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$u(\varepsilon, x, 0) = 0, \tag{3.2}$$

$$v(\varepsilon, x, 0) = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to\infty} u(\varepsilon, x, y) = U_\infty \\ \lim\limits_{y\to\infty} v(\varepsilon, x, y) = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2}$, $u, v, p : (0, \varepsilon_0) \times [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\varepsilon, x, y)$, $v = v(\varepsilon, x, y)$, $p = p(\varepsilon, x, y)$ sînt funcţiile necunoscute ale problemei, (u, v) fiind cîmpul vitezelor, iar p — al presiunilor. Re este parametrul fizic al problemei şi el este raportul forţelor de inerţie şi cele de vîscozitate

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty^2/L}{\nu U_\infty/L^2} \frac{U_\infty L}{\nu}. \tag{3.5}$$

$U_\infty \vec{i}$ este viteza cu care curentul de fluid atacă corpul, iar Ω domeniul de mişcare (i.e. exteriorul corpului, pentru simplitate considerat doar pentru $y > 0$). L reprezintă o lungime caracteristică pentru mişcarea de scară mare din jurul corpului. Dacă fluidul are coeficientul de vîscozitate cinematică ν mic, iar U_∞ şi L nu sînt mici în raport cu ν, atunci Re este foarte mare (Re $\to \infty$), iar $\varepsilon > 0$ este un parametru matematic foarte mic care tinde la zero. El este variabila asimptotică a problemei în timp ce x şi y sînt parametrii din punct de vedere asimptotic. ε apare în problema (3.1) — (3.4) numai ca factor pe lîngă derivatele de ordin cel mai mare de aceea raţionamente analoage celor din §2 arată că (3.1) — (3.4) este o problemă de perturbaţii singulare de tip strat limită, stratul limită fiind lîngă peretele corpului, adică lîngă $y = 0$, viteza avînd acolo (conform observaţiilor experimentale) o variaţie foarte rapidă. Pentru a determina comportamentul asimptotic pentru Re $\to \infty$, $\varepsilon \to 0$ al soluţiei (u, v, p) a acestei probleme aplicăm metoda dezvoltărilor asimptotice exterioare şi interioare racordate alegînd drept dezvoltare exterioară seria asimptotică după şirul asimptotic $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \frac{1}{\mathrm{Re}}, \ldots\right\}$ pentru Re $\to \infty$, deci $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots\}$ pentru $\varepsilon \to 0$

$$u(\varepsilon, x, y) \sim U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \ldots \tag{3.6}$$

$$v(\varepsilon, x, y) \sim V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + \ldots \tag{3.7}$$

$$p(\varepsilon, x, y) \sim P_0(x, y) + \varepsilon P_1(x, y) + \ldots \tag{3.8}$$

în care deşi termenii seriilor (3.6) — (3.8) sînt definiţi pentru $y \geqslant 0$ aceste serii sînt valabile (i.e. reprezintă o aproximaţie asimptotică a soluţiei exacte (u, v, p) doar pentru $y = \mathcal{O}(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$) şi presupunînd că dezvoltarea interioară

$$u(\varepsilon, x, y) \equiv u(\varepsilon, u, \hat{y}) \sim u_0(x, \hat{y}) + \varepsilon u_1(x, \hat{y}) + \ldots \tag{3.9}$$

$$v(\varepsilon, x, y) \equiv v(\varepsilon, x, \hat{y}) \sim \varepsilon v_1(x, \hat{y}) + \ldots \tag{3.10}$$

$$p(\varepsilon, x, y) \equiv p(\varepsilon, x, \hat{y}) \sim p_0(x, \hat{y}) + \varepsilon p_1(x, \hat{y}) + \ldots \tag{3.11}$$

$\left(\text{unde } \hat{y} = \frac{y}{\varepsilon} = y\sqrt{\mathrm{Re}}\right)$ este valabilă pentru $\hat{y} = \mathcal{O}(1)$ pentru Re $\to \infty$. Alegerea seriilor (3.6) — (3.11) a ţinut seama de cele două ipoteze fun-

damentale a lui Prandtl : 1° influența vîscozității se simte numai într-un strat subțire de grosime $\delta_d(\mathrm{Re})$ de lîngă corp; 2° în acel strat forțele de inerție sînt comparabile (i.e. de același ordin de mărime) cu cele vîscoase. S-au mai luat în considerație și alte ipoteze ale lui Prandtl : componenta v, transversală pe stratul limită, a vitezei este mult mai mică decît componenta longitudinală u iar variația lui u transversal pe stratul limită este mult mai mare decît cea longitudinală. Aceasta a făcut ca deși adimensionalizarea era realizată cu ajutorul acelorași mărimi caracteristice, totuși au fost luate în considerație ordinele de mărime diferite ale mărimilor. Astfel, (3.7) și (3.11) arată că $\hat{u} \sim 1$ și $\hat{p} \sim 1$ sau, în mărimi dimensionale, fizice (desemnate prin indicele f), $\hat{u}_f \sim U_\infty$, $\hat{p}_f \sim \rho U_\infty^2$ în schimb din (3.10) avem $\hat{v} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ și deci $\hat{v}_f \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} U_\infty$. Pentru simplitatea scrierii în loc de $\mathcal{O}$ în acest paragraf scriem $\sim$. Faptul că în stratul limită $\hat{y} \sim 1$ arată că în stratul limită $y \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$. Rezultă atunci că în stratul limită termenii inerțiali dimensionali din prima ecuație de impuls sînt toți de ordinul lui U_∞^2 / L căci $u \frac{\partial u}{\partial x} = \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \sim 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$,

$v \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\mathrm{Re}}\, \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \sim \sqrt{\mathrm{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \cdot 1 = 1$, ceea ce revine la $u_f \frac{\partial u_f}{\partial x_f} \sim U_\infty^2 / L$,

$v_f \frac{\partial u_f}{\partial y_f} \sim U_\infty^2 / L$ iar, analog, termenii din cea de a doua ecuație de impuls sînt $u \frac{\partial v}{\partial x} \sim 1 \cdot \frac{1/\sqrt{\mathrm{Re}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, $v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \cdot \frac{1/\sqrt{\mathrm{Re}}}{1/\sqrt{\mathrm{Re}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ ceea ce dimensional se scrie cu $u_f \frac{\partial v_f}{\partial x_f} \sim \frac{U_\infty^2 / L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, $v_f \frac{\partial v_f}{\partial y_f} \sim \frac{U_\infty^2 / L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$. În schimb termenii vîscoși din prima ecuație de impuls sînt de ordine de mărime diferite

$\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{1}{(1/\sqrt{\mathrm{Re}})^2} \sim 1$ i.e. $\nu \frac{\partial^2 u_f}{\partial x_f^2} \sim \frac{\nu U_\infty}{L^2} =$

$= \frac{1}{\mathrm{Re}} U_\infty^2 / L$, $\nu \frac{\partial^2 u_f}{\partial y_f^2} \sim \frac{\nu U_\infty}{(L/\sqrt{\mathrm{Re}})^2} = \frac{U_\infty^2}{L}$. Astfel, termenul vîscos de ordin mai mare este $\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ și el este de același ordin de mărime cu termenii inerțiali. În stratul limită raportul dintre forțele inerțiale și cele vîscoase este, reținînd numai termenii de ordinul cel mai mare, în coordonate fizice $u \frac{\partial u}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]^{-1}$ și cum el este de ordinul lui l rezultă că raportul dimensiunilor lor caracteristice este de acest ordin, deci $\frac{U_\infty^2 / L}{\nu U_\infty / l^2} \sim 1$ unde

l desemnează o lungime caracteristică de scară mică, pentru y. Cu alte cuvinte

$$\mathrm{Re}\left(\frac{l}{L}\right)^2 \sim 1 \tag{3.12}$$

deci $l \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ pentru $\mathrm{Re} \to \infty$, ceea ce arată că grosimea stratului limită este de ordinul lui $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ și justificată alegerea coordonatei de strat limită $\hat{y} = \frac{1}{1/\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

Toate aceste relații de ordin au fost intuite de Prandtl, relațiile (3.6) — (3.11) fiind o consecință a acestor intuiții.

Relațiile (3.6) — (3.8) arată că s-a făcut presupunerea că la mari distanțe de corp i.e. pentru $y = \mathcal{O}(1)$ ambele componente ale vitezei și presiunea au același ordin de mărime, lungimile caracteristice în direcția x și y fiind comparabile, deci fenomenul de curgere neprezentînd caracteristici și corespunzător, scări deosebite într-o direcție preferențială.

Să formăm acum problemele de primă aproximație asimptotică exterioară și interioară, deci cele care au drept soluții pe (U_0, V_0, P_0) și respectiv (u_0, v_0, p_0). Obținerea ecuațiilor nu implică nici o dificultate, ea este formală; se ține seama numai de ordinul de mărime al diferiților termeni. Astfel, înlocuind (3.6) în $(3.1)_1$ avem

$$U_0\frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial P_0}{\partial x} + \varepsilon\left(U_0\frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1\frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0\frac{\partial U_1}{\partial y} + V_1\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) + \varepsilon^2(\ldots) = 0,$$

din care, egalînd cu zero coeficienții lui 1, ε, ε^2, găsim în particular

$$U_0\frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0\frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial x}; \tag{3.13}$$

analog înlocuind (3.6) — (3.8) în $(3.1)_{2,3}$ și reținînd termenii de ordin maxim găsim

$$U_0\frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0\frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial y}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0. \tag{3.15}$$

(3.13) — (3.15) sînt binecunoscutele ecuații ale lui Euler, definite în tot Ω. S-a arătat că atașînd la ele condițiile (3.2) — (3.4) se obține o problemă

(limită) care n-are soluție. Acest rezultat era de așteptat deoarece ecuațiile (3.13), (3.14) sînt de ordin întîi spre deosebire de $(3.1)_{1,2}$ care sînt de ordin doi și deci la ecuațiile lui Euler trebuie atașate mai puține condiții din cele de lîngă stratul limită i.e. de la peretele $y = 0$. Dintre aceste condiții (3.2), (3.3) vom alege-o pe (3.3) care constituie condiția necesară și suficientă ca peretele $y = 0$ să fie impermeabil. Ea exprimă de asemenea și condiția de alunecare la perete, scrisă de obicei sub forma $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ unde $\vec{u} = (u, v)$, iar $\vec{n}$ este versorul normalei la perete. În acest fel am format modelul (problema) redus(ă) constînd din ecuațiile (3.13) — (3.15) în Ω și condițiile

$$V_0(x, 0) = 0 \tag{3.3}'$$

$$\lim_{y\to\infty} U_0(x, y) = U_\infty, \quad \lim_{y\to\infty} V_0(x, y) = 0. \tag{3.4}'$$

Am păstrat neschimbate condițiile de la mari distanțe deoarece acolo soluția problemei reduse este presupusă a aproxima asimptotic pentru $\mathrm{Re} \to \infty$ soluția modelului Navier-Stokes. Evident, soluția problemei reduse nu va aproxima asimptotic pe cea a problemei (3.1) — (3.4) lîngă $y = 0$ deoarece în definirea ei s-a neglijat informația cuprinsă într-una din condițiile la $y = 0$ (3.2).

Formal, modelul lui Euler este model de primă aproximație asimptotică exterioară pentru $\mathrm{Re} \to \infty$ a modelului Navier-Stokes și ca atare el nu este fizic îndreptățit, ci reprezintă doar un model de aproximație. Deși este definit în același domeniu ca și modelul Navier-Stokes el realizează acea aproximație doar departe de corp.

Să deducem acum problema a cărei soluție este (u_0, v_1, p_0). Pentru aceasta se transcriu mai întîi ecuațiile (3.1) în variabilele $\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}, x, y\right)$ și apoi în ecuațiile obținute se introduc dezvoltările (3.7) — (3.11). Egalarea cu zero a termenilor de ordinul cel mai mare din fiecare ecuație conduce la ecuațiile următoare, retranscrise în variabilele $\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}, x, y\right)$

$$\begin{cases} u_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = -\dfrac{\partial p_0}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \\ 0 = -\dfrac{\partial p_0}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Spre deosebire de ecuațiile lui Euler, ecuația $(3.16)_1$ conține pe Re, deși dacă am fi folosit coordonatele $\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}, x, \hat{y}\right)$ acesta n-ar fi apărut explicit. Comparînd $(3.16)_1$ cu $(3.1)_1$ constatăm că prin trecerea de la $(3.1)_1$ la

$(3.16)_1$ s-a păstrat ordinul de diferențiabilitate dar s-a renunțat la termenul vîscos în direcție longitudinală. Ecuația $(3.16)_2$ arată că transversal pe stratul limită, în primă aproximație asimptotică interioară presiunea nu variază. De aceea Prandtl a ales presiunea din stratul limită egală cu cea de pe frontiera $y = 0$ din modelul lui Euler (mai precis din ecuația lui Bernoulli dedusă din acel model) și anume $\frac{dp_0}{dx} = -U_0(x, 0)\frac{dU_0}{dx}(x, 0)$. Atunci ecuațiile satisfăcute de u_0 și v_1 sînt

$$\begin{cases} u_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = U_0(x, 0)\dfrac{dU_0}{dx}(x, 0) + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

La acestea trebuie adăugat neapărat condițiile (3.2) și (3.3) la perete, iar în loc de condițiile de la $y \to \infty$ vom folosi condițiile ce rezultă din aplicarea principiului de racordare 1×1

$$\begin{cases} U_0(x, 0) = u_0(x, \infty), \\ 0 = V_0(x, 0) = v_1(x, \infty), \end{cases} \tag{3.18}$$

astfel că, în final, modelul de primă aproximație asimptotică interioară pentru $\mathrm{Re} \to \infty$ al modelului Navier-Stokes este modelul lui Prandtl constînd din ecuațiile (3.17), condițiile (3.2) și (3.3) și condițiile (3.18). El este definit în tot Ω, dar are valabilitate de model de aproximație asimptotică doar în stratul limită. Modelul lui Prandtl depinde de cel al lui Euler atît în ecuații cît și în condiții, mai precis de distribuția de viteză longitudinală pe perete $U_0(x, 0)$ din modelul lui Euler. (Această dependență este cunoscută sub numele de interacțiunea vîscos-nevîscos). Ca și modelul lui Euler, modelul lui Prandtl nu are îndreptățire fizică, ci doar este o primă aproximație matematică a modelului fizic Navier-Stokes.

Din cele de mai sus rezultă că o aproximație asimptotică de ordin 1 a soluției (u, v, p) a modelului Navier-Stokes *în tot* Ω este obținută cu ajutorul soluțiilor modelelor lui Euler și Prandtl în următorul mod

$$u \sim \begin{cases} U_0(x, y) & \text{pentru } y = \mathcal{O}(1) \text{ pentru } \mathrm{Re} \to \infty \\ U_0(x, 0) & \text{pentru } y \text{ dintre regiunile } y = \mathcal{O}(1) \\ & \text{și } y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right) \text{ pentru } \mathrm{Re} \to \infty \\ u_0(x, \hat{y}) & \text{pentru } \hat{y} = \mathcal{O}(1) \text{ pentru } \mathrm{Re} \to \infty \end{cases}$$

$$v \sim \begin{cases} V_0(x, y) & \text{pentru } y = \mathcal{O}(1) \text{ pentru Re} \to \infty \\ 0 & \text{pentru } y \text{ dintre regiunile } y = \mathcal{O}(1) \\ & \text{și } y = \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right) \text{ pentru Re} \to \infty \\ v_1(x, \hat{y}) & \text{pentru } \hat{y} = \mathcal{O}(1) \text{ pentru Re} \to \infty \end{cases}$$

$$p \sim \begin{cases} P_0(x, y) & \text{pentru } \hat{y} = \mathcal{O}(1) \text{ pentru Re} \to \infty \\ P_0(x, 0) & \text{în restul domeniului } \Omega. \end{cases}$$

Primit în redacție la 26 martie 1990

MIȘCAREA GENERALĂ A VEHICULULUI SPAȚIAL PE ORBITE ECUATORIALE PLANE

de I. STROE

Institutul Politehnic București

În lucrare sînt prezentate aspecte ale mișcării generale a vehiculului spațial pe orbite ecuatoriale, mișcarea fiind precizată prin coordonatele centrului de masă r_v, v și unghiurile ψ, θ, φ care dau orientarea vehiculului spațial față de un reper de bază.

1. ECUAȚIILE GENERALE ALE MIȘCĂRII

Ecuațiile generale ale mișcării pot fi puse sub forma ecuațiilor lui Hamilton,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \tag{1.1}$$

unde H este funcția lui Hamilton, iar q_k, p_k sînt respectiv coordonatele și impulsurile generalizate.

Pentru a scrie funcția H sînt necesare expresiile funcției de forța U și energiei cinetice E.

Funcția de forță U se scrie, luînd în considerație influența armonicei gravitaționale J_2 [5] și a distribuției masei vehiculului spațial [9],

$$U = \mu \frac{m}{r_V} - \frac{1}{2} \frac{\mu m}{r_V^3} R^2 J_2 (3 \sin^2 \Phi - 1) + \tag{1.2}$$

$$+ \frac{\mu}{2r_V^3} [A + B + C - 3(a_{11}^2 A + a_{12}^2 B + a_{13}^2 C)]$$

În relațiile de mai sus Φ este unghiul care precizează latitudinea ($\Phi = 0$, pentru orbite ecuatoriale), A, B, C sînt momente de inerție centrale principale, iar a_{ij} sînt cosinuși directori precizați în [9], dați de relațiile :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\theta \cos\varphi, \\
a_{12} &= -\sin\theta, \\
a_{13} &= \cos\theta \sin\varphi, \\
a_{21} &= \cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi, \\
a_{22} &= \cos\psi \cos\theta, \\
a_{23} &= \cos\psi \sin\theta \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi, \\
a_{31} &= \sin\psi \sin\theta \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi, \\
a_{32} &= \sin\psi \cos\theta, \\
a_{33} &= \sin\psi \sin\theta \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 1, 1992, P. 43—48

Energia cinetică a vehiculului spaţial se scrie

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}_V^2 + r_V^2\dot{\nu}^2) + \frac{1}{2}Ap^2 + \frac{1}{2}Bq^2 + \frac{1}{2}Cr^2, \tag{1.4}$$

unde p, q, r sînt viteze unghiulare date de relaţiile ([9]) :

$$\begin{aligned} p &= a_{11}\dot{\psi} - \dot{\theta}\sin\varphi + a_{31}\dot{\nu}, \\ q &= a_{12}\dot{\psi} + \dot{\varphi} + a_{32}\dot{\nu}, \\ r &= a_{13}\dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\varphi + a_{33}\dot{\nu}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Înlocuind în (1.2),

$$\Phi = 0 \tag{1.6}$$

şi folosind relaţii de forma

$$p_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.7}$$

unde

$$\mathscr{L} = E + U \tag{1.8}$$

este funcţia lui Lagrange se pot calcula impulsurile generalizate :

$$\begin{aligned} p_{r_V} &= m\,\dot{r}_V, \\ p_\nu &= mr_V^2\dot{\nu} + Ap\,a_{31} + Bq\,a_{32} + Cr\,a_{33}, \\ p_\psi &= Ap\,a_{11} + Bq\,a_{12} + Cr\,a_{13}, \\ p_\varphi &= Bq, \\ p_\theta &= -Ap\sin\varphi + Cr\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Din ultimele trei relaţii de mai sus se obţine :

$$\begin{aligned} Ap &= \frac{p_\psi\cos\varphi - p_\varphi\,a_{12}\cos\varphi - p_\theta\,a_{13}}{a_{11}\cos\varphi + a_{13}\sin\varphi}, \\ Bq &= p_\varphi, \\ Cr &= \frac{p_\psi\sin\varphi - p_\varphi\,a_{12}\sin\varphi + p_\theta\,a_{12}}{a_{13}\sin\varphi + a_{11}\cos\varphi} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Înlocuind (1.9), (1.10) în (1.4) se obține

$$E=\frac{1}{2m}\left[p_{r_V}^2+\frac{1}{r_V^2}\left(p_\nu-a_{31}\frac{p_\psi\cos\varphi-p_\varphi a_{12}\cos\varphi-p_\theta a_{13}}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_{32}p_\varphi-a_{33}\frac{p_\psi\sin\varphi-p_\varphi a_{12}\sin\varphi+p_\theta a_{12}}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2A}\left(\frac{p_\psi\cos\varphi-p_\varphi a_{12}\cos\varphi-p_\theta a_{13}}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}\right)^2+\frac{1}{2B}p_\varphi^2+ \tag{1.11}$$

$$+\frac{1}{2C}\left(\frac{p_\psi\sin\varphi-p_\varphi a_{12}\sin\varphi+p_\theta a_{11}}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi}\right)^2$$

Folosind expresiile (1.2), (1.11) ecuațiile (1.1) se scriu

$$\dot r_V=\frac{1}{m}p_{r_V},$$

$$\dot\nu=\frac{1}{mr_V^2}\left(p_\nu-a_{31}\frac{p_\psi\cos\varphi-p_\varphi a_{12}\cos\varphi-p_\theta a_{13}}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}-a_{32}p_\varphi-\right.$$

$$\left.-a_{33}\frac{p_\psi\sin\varphi-p_\varphi a_{12}\sin_1\varphi+p_\theta a_{11}}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi}\right),$$

$$\dot\psi=-\frac{1}{mr_V^2}(p_\nu-a_{31}Ap-a_{32}Bq-a_{33}Cr)\left(\frac{a_{31}\cos\varphi}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin_1\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{33}\sin\varphi}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi}\right)+p\frac{\cos\varphi}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}+$$

$$+r\frac{\sin\varphi}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi},$$

$$\dot\varphi=\frac{1}{mr_V^2}\left(p_\nu-a_{31}Ap-a_{32}Bq-a_{33}Cr\right)\left(\frac{a_{31}a_{12}\cos\varphi}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}+\right. \tag{1.12}$$

$$\left.+\frac{a_{33}a_{12}\sin\varphi}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi}\right)-p\frac{a_{12}\cos\varphi}{a_{11}\cos\varphi+a_{13}\sin\varphi}+q-$$

$$-r\frac{a_{12}\sin\varphi}{a_{13}\sin\varphi+a_{11}\cos\varphi},$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr_V^2}(p_\nu - a_{31}Ap - a_{32}Bq - a_{33}Cr)\left(\frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}\cos\varphi + a_{13}\sin\varphi} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{33}a_{11}}{a_{13}\sin\varphi + a_{11}\cos\varphi}\right) - p\frac{a_{13}}{a_{13}\sin\varphi + a_{11}\cos\varphi} +$$

$$+ r\frac{a_{11}}{a_{13}\sin\varphi + a_{11}\cos\varphi},$$

$$-\dot{p}_{r_V} = -\frac{1}{mr_V^3}(p_\nu - a_{31}Ap - a_{32}Bq - a_{33}Cr)^2 +$$

$$+ \mu\frac{m}{r_V^2} + \frac{3}{2}\frac{\mu\, mJ_2R}{r_V^4} + \frac{3}{2}\frac{\mu}{r_V^4}[A + B + C - 3(a_{11}^2 A + a_{12}^2 B + a_{13}^2 C)],$$

$$-\dot{p}_\nu = 0,$$

$$-\dot{p}_\psi = \frac{\partial H}{\partial \psi},$$

$$-\dot{p}_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \qquad -\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Sistemul de ecuații (1.12) admite integralele prime

$$E - U = \alpha_1 \text{ (integrala energiei)},$$
$$p_\nu = \alpha_2. \tag{1.13}$$

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE PENTRU SATELITUL STABILIZAT GRAVITAȚIONAL

Ecuațiile de mișcare devin simple în cazul în care vehiculul execută mici oscilații (mișcarea în jurul centrului de masă) față de poziția de echilibru, poziție pentru care coordonatele unghiulare ψ, φ, θ sînt nule. În acest caz se pot liniariza termenii corespunzători rotației, înlocuind în energia cinetică coordonatele unghiulare de echilibru și aproximîndu-se funcția de forță cu forma pătratică. Cu aceste aproximații, energia cinetică (1.4) și funcția de forță (1.2) devin :

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}_V^2 + r_V^2\dot{\nu}^2) + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C(\dot{\theta} + \dot{\nu})^2 \tag{2.1}$$

$$U = \frac{\mu m}{r_V} + \frac{1}{2}\frac{mJ_2R^2}{r_V^3} + \frac{\mu}{2r_V^3}[B + C - 2A - 3(B-A)\theta^2 - 3(C-A)\varphi^2] \tag{2.2}$$

Folosind (2.1), impulsurile generalizate se scriu :

$$\begin{aligned} p_{r_V} &= m\dot{r}_V, \\ p_\nu &= mr_V^2\dot{\nu} - C(\dot{\theta} + \dot{\nu}), \\ p_\psi &= A\dot{\psi}, \\ p_\varphi &= B\dot{\varphi}, \\ p_\theta &= C(\dot{\theta} + \dot{\nu}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Energia cinetică, exprimată în funcție de coordonatele și impulsurile generalizate se scrie

$$E = \frac{1}{2m}\left[p_{r_V}^2 + \frac{1}{r_V^2}(p_\nu - p_\theta)^2\right] + \frac{p_\psi^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2B} + \frac{p_\theta^2}{2C} \tag{2.4}$$

Ecuațiile lui Hamilton (1.1) se scriu :

$$\begin{aligned} \dot{r}_V &= \frac{p_{r_V}}{m}, \\ \dot{\nu} &= \frac{p_\nu - p_\theta}{mr_V^2}, \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{A}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{B}, \\ \dot{\theta} &= -\frac{p_\nu - p_\theta}{mr_V^2} + \frac{p_\theta}{C}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$-\dot{p}_{r_V} = -\frac{(p_\nu - p_\theta)^2}{mr_V^2} + \mu\frac{m}{r_V^2} + \frac{3}{2}\frac{\mu m J_2 R^2}{r_V^4} +$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\mu}{r_V^4}[B + C - 2A - 3(B - A)\theta^2 - 3(C - A)\varphi^2],$$

$$\begin{aligned} -\dot{p}_\nu &= 0, \\ -\dot{p}_\psi &= 0, \\ -\dot{p}_\varphi &= \frac{3\mu(C - A)}{r_V^3}\varphi, \\ -\dot{p}_\theta &= \frac{3\mu(B - A)}{r_V^3}\theta. \end{aligned}$$

Sistemul de mai sus admite integralele prime :

$$E - U = \alpha_1,$$

$$p_\nu = mr_V^2\dot{\nu} + C(\dot{\theta} + \dot{\nu}) = \alpha_2, \tag{2.6}$$

$$p_\psi = A\dot{\psi} = \alpha_4.$$

Ecuaţiile de mai sus permit studiul unor interferenţe între mişcarea pe traiectorie şi mişcarea în jurul centrului de masă.

Primit în redacţie la 28 februarie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. BELEŢKII, *O librafii sputnika*, Iskusstvennie sputniki Zemli, vîp 3, 1959.
2. V. V. BELETSKY, *The libration of a satellite on an elliptic orbit, Dynamics of Satellites, IUTAM Symposium, Paris, 1962*, Editor Maurice Roy, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
3. V. V. BELEŢKII, *Ocerki o dvijenii kosmiceskih tel*, Moskva, 1977.
4. L. I. KARGU, *Sistemî uglavoi stabilizaţii kosmiceskih apparatov*, Moskva, 1973.
5. M. M. NIŢĂ, *Teoria zborului spaţial*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1973.
6. M. M. NIŢĂ, I. STROE, *Asupra stabilităţii satelitului ecuatorial considerat solid rigid*, St. cerc. mec. apl., **47**, 5 (1988).
7. V. A. SARÎCEEV, V. V. SAZANOV, V. A. ZLATOISTOV, *Periodiceskie vraşceniia sputnika v ploskiosti elliptceskoi orbiti*, Kosmiceskie Issledovaniia, vîp 2, 1971.
8. I. STROE, *Asupra mişcării plane a vehiculului spaţial în prezenţa unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985).
9. I. STROE, *Perturbaţiile mişcării centrului de masă al vehiculului spaţial date de mişcarea în jurul centrului de masă*, St. cerc. mec. apl., **44**, 6 (1985).
10. I. STROE, *Influenţa distribuţiei de masă şi a armonicei gravitaţionale J_2 asupra mişcării vehiculului spaţial pe orbite ecuatoriale circulare*, St. cerc. mec. apl., **45**, 1 (1986).
11. I. STROE, *Integrale prime ale ecuaţiilor mişcării vehiculului spaţial în prezenţa unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **45**, 5 (1986).
12. T. YOSAKA, *The structural feasibility of a gravity stabilized antenna*, Acta Astronautica, 5—6 (1981).

O METODĂ INTEGRALĂ SIMPLĂ DE ANALIZĂ A MIȘCĂRII POTENȚIALE ÎN JURUL PROFILELOR AERODINAMICE

de V. MUȘAT

INCREST — București

În acest articol este prezentată o metodă de analiză a mișcării potențiale în jurul profilelor aerodinamice. În cadrul metodei profilul se asimilează cu o distribuție de surse constante și de vîrtejuri distribuite liniar pe fiecare segment de dreaptă ce formează conturul discretizat. Pentru micșorarea numărului de necunoscute se consideră sursele și vîrtejurile, de pe segmentele de dreapta corespondente, egale pe extrados și intrados.

Rezultatele obținute sînt comparate cu soluția exactă pentru cerc precum și cu un caz test pentru două profile. Mai sînt prezentate comparativ și soluții obținute cu metode de calcul consacrate.

1. INTRODUCERE

Unul din cele mai abordate subiecte în aerodinamica teoretică este cel al analizei profilelor aerodinamice [1]. Pe măsură ce necesitatea unor profile aerodinamice mai performante este mai stringentă, devine mai evidentă necesitatea unor metode de analiză cît mai exacte și mai simple pentru calculele inginerești.

Un număr mare de metode cu ecuații integrale sînt utilizate în prezent pentru rezolvarea mișcării potențiale, vezi [2]—[5]. Aceste metode fac parte din categoria metodelor indirecte cu elemente de frontieră [10]. Diferențele între aceste metode se datorează : a) tipului de elemente de frontieră cu care se discretizează conturul profilului, b) tipului de singularități distribuite pe contur și c) modului de distribuție a acestora. Astfel ca elemente de frontieră se utilizează în mod obișnuit segmente de dreapta [2] — [4], sau arce de curbă [5]. Singularitățile distribuite pot fi vîrtejuri, ca în metodele [3] și [4], sau surse și vîrtejuri, vezi [2] și [5]. Distribuția de singularități cea mai utilizată este cea uniformă [2] și [4] și liniară ca în [3] dar se pot folosi și distribuții patratice ca în [5].

Soluțiile exacte [6] și [7], pentru mișcarea potențială în jurul profilelor multiple, au fost obținute prin utilizarea transformărilor conforme. Aceste soluții sînt considerate cazuri test pentru noile metode de calcul.

Metoda prezentată aici poate fi privită în principiu ca o extindere a metodei singularităților interne [8]. Distribuția simetrică de vîrtejuri și surse pe extrados și intrados este asimilabilă cu mutarea singularităților din interior (de pe schelet) pe conturul profilului ca și cum scheletul (suportul singularităților) s-ar dilata.

2. PUNEREA PROBLEMEI

După cum se știe în cazul mișcărilor potențiale în jurul unui profil de contur C dat, problema care se pune din punct de vedere matematic este o problemă de tip Neumann, și anume :

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1}$$

cu condiția la limită :

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_c = 0 \tag{2}$$

Potențialul total Φ poate fi pus sub forma de sumă a unui potențial al mișcării de la infinit φ_∞ și a unui potențial de perturbație φ. Potențialul φ_∞ în cazul mișcării uniforme este dat de relația $\Delta\varphi_\infty = \vec{V}_\infty$. Astfel, problema poate fi pusă sub forma :

$$\Delta\varphi = 0 \tag{3a}$$

$$\lim_\infty \nabla\varphi = 0 \tag{3b}$$

și condiția la limită :

$$\vec{V}_\infty \vec{n} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_c = 0 \tag{4}$$

Se presupune o distribuție oarecare de surse $q(x, y)$ și de vîrtejuri $\gamma(x, y)$ pe conturul C. Prin înlocuirea expresiilor vitezelor de perturbație, date de aceste singularități, în ecuația (4) se obține ecuația integrală de tip Fredholm :

$$\vec{V}_\infty \vec{n}(x, y) - \frac{1}{\pi}\int_c q(x', y')\frac{\partial f(x, y)}{\partial n(x, y)}\,ds(x', y') + \\ + \frac{1}{\pi}\int_c \gamma(x', y')\frac{\partial f(x, y)}{\partial t(x, y)}\,ds(x', y') = 0 \tag{5}$$

unde cu $f(x, y)$ s-a notat funcția Green pentru problema bidimensională :

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}\ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] \tag{6}$$

În ecuația (5) cu $\vec{n}$ și $\vec{t}$ s-au notat normala exterioară și tangenta locală în sensul parcurgerii conturului C.

Problema pusă sub forma diferențială, ecuațiile (3) și (4), a fost transformată într-o formă integrală, ecuația (5), fapt ce asigură cîteva avantaje dintre care principale sînt : reducerea cu o unitate a dimensiunii problemei studiate și aplicabilitatea directă la probleme cu domenii infinite.

O atenție deosebită se cere la tratarea singularității integralelor din ecuația (5), vezi [9] și [10]. În final, după tratarea singularității, ecuația (5) se scrie sub forma :

$$\vec{V}_\infty \vec{n}(x, y) - \frac{1}{\pi}q(x, y) - \frac{1}{\pi}\int_{C'} q(x', y')\frac{\partial f(x, y)}{\partial n(x, y)}\,ds(x', y') + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{C'} \gamma(x', y')\frac{\partial f(x, y)}{\partial t(x, y)}\,\partial s(x', y') = 0 \tag{7}$$

în care conturul C' este format din mulțimea punctelor ce formează conturul C, mai puțin punctul (x, y).

3. SOLUȚIONAREA PROBLEMEI

Aproximarea integralelor din ecuația (7) se face prin aproximarea conturului C și a funcțiilor de distribuție q și γ. O aproximare superioară conduce în mod natural la rezultate mai bune dar trebuie luată în considerație și simplitatea calculelor necesare. Există o relație între ordinul funcțiilor de aproximare a conturului C și a singularităților q și γ, vezi [10], și anume ordinul funcțiilor alese pentru a descrie conturul C se ia cel mult egal cu ordinul funcțiilor alese pentru aproximarea singularităților.

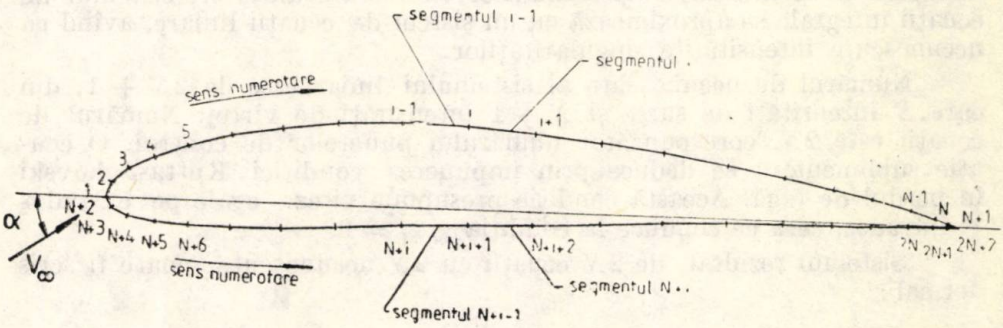


Fig. 1.— Discretizarea geometriei unui profil în elemente de frontieră (segmente de dreapta)

În cadrul metodei propuse conturul C al profilului se discretizează cu ajutorul a $2N$ segmente de dreapta, elemente de frontieră, ce unesc cîte două puncte alăturate situate pe contur ca în figura 1. Numărul de segmente de drepte de pe extrados este egal cu cel de pe intrados. Trebuie să se aibe grijă ca zonele cu gradienți mari de presiune, de obicei bordul de atac și bordul de fugă, să se discretizeze cît mai fin. Punctul de control pe fiecare segment este situat la mijlocul respectivului segment.

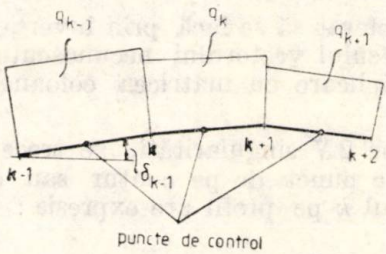


Fig. 2a. — Distribuția de surse q.

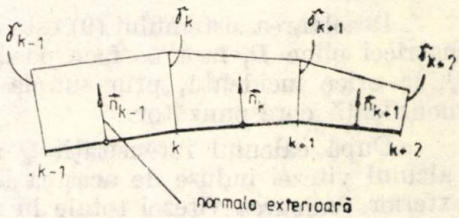


Fig. 2b. — Distribuția de vîrtejuri γ.

În ceea ce privește funcțiile q și γ de distribuție a singularităților, ele se aleg cît mai simple pentru ca expresiile integralelor din ecuația (7) să fie cît mai simple. Astfel pe fiecare element de frontieră i se consideră funcția q_i constantă și funcția γ_i de gradul întîi. Acest fapt corespunde, (vezi fig. 2) unei distribuții de surse constante și de vîrtejuri variind liniar, asigurînd în acest fel continuitatea distribuției de vîrtejuri.

În cadrul teoriei profilelor subțiri [13] și [14], sau a metodei cu singularități interne [8], distribuția de singularități pe schelet este simetrică corespunzător extradosului și intradosului. Prin analogie se consideră, și în metoda prezentă, că intensitatea singularităților de pe extrados și intrados, pe elementele de frontieră corespondente i și $N + i$ ($i = 1,2,\ldots, N$), este identică.

Impunerea condiției la limită, dată de ecuația (7), în diferite puncte de control de pe conturul C conduce la obținerea unui sistem de ecuații integrale. Prin utilizarea aproximărilor enumerate anterior, sistemul de ecuații integrale se aproximează cu un sistem de ecuații liniare, avînd ca necunoscute intensitățile singularităților.

Numărul de necunoscute al sistemului liniar este de $2N + 1$, din care N intensități de surse și $N + 1$ intensități de vîrtej. Numărul de ecuații este $2N$, corespunzător numărului punctelor de control. O ecuație suplimentară se deduce prin impunerea condiției Kutta-Jukovski în bordul de fugă. Această condiție presupune viteze egale pe extrados și intrados, ceea ce conduce la condiția $\gamma_{N+1} = 0$.

Sistemul rezultat, de $2N$ ecuații cu $2N$ necunoscute, poate fi scris formal :

$$\sum_{i=1}^{N} q_i A_{ki} + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i B_{ki} = C_k \tag{8}$$

în care coeficienții A_{ki}, B_{ki} și C_k se calculează cu formule analitice obținute prin integrarea ecuației (7), ceea ce conduce la erori minime de calcul. Notînd cu Q vectorul necunoscutelor, sistemul (8) poate fi scris sub forma condensată :

$$\sum_{i=1}^{2N} Q_i D_{ki} = C_k \qquad k = 1,2,\ldots, 2N \tag{9}$$

Rezolvarea sistemului (9) este de preferat să se facă prin inversarea matricei pline D, fapt ce face posibil calculul vectorului necunoscutelor Q, la orice incidentă, prin simpla multiplicare cu matricea coloana C modificată corespunzător.

După calculul intensității Q a celor $2N$ singularități, se trece la calculul vitezei induse de acestea în orice punct de pe contur sau din exterior. Valoarea vitezei totale în punctul k pe profil are expresia :

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_k}} [V_\infty \cdot \cos \alpha + u_k + \operatorname{tg} \delta_k (V_\infty \cdot \sin \alpha + v_k)] \tag{10}$$

unde s-au notat cu u_k şi v_k componentele vitezei de perturbaţie iar cu tg δ_k panta elementului de frontieră k, vezi figura 2. Este de reţinut din expresia (10) factorul $(1+\text{tg}^2\delta_k)^{-1/2}$ absolut similar cu factorul de corecţie Riegels din teoria profilelor subţiri, vezi [13].

Efectul compresibilităţii se poate lua în consideraţie cu ajutorul unor factori de corecţie [11], cum ar fi: factorul Prandtl-Glauert, Karman-Tsien, Weber etc. Pentru metoda de calcul propusă a fost ales factorul de corecţie Wilby [15], foarte asemănător cu cel dedus de Weber şi care dă rezultate foarte bune. Viteza V_c în cazul mişcărilor compresibile este dată de expresia (10) modificată:

$$V_{ck} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{B^2}\text{tg}^2\delta_k}} \left[V_\infty \cdot \cos\alpha + \frac{1}{B} u_k + \text{tg}\,\delta_k \left(V_\infty \cdot \sin\alpha + \frac{1}{B} v_k \right) \right] \tag{11}$$

unde factorul Wilby, notat cu B, este dat de expresia:

$$B = \sqrt{1 - M_\infty^2(1 - c_{pi} M_\infty)} \tag{12}$$

Coeficientul de presiune în incompresibil c_{pi} este dat de relaţia $c_{pi} = 1 - (V/V_\infty)^2$, iar coeficientul de presiune în compresibil c_p este dat de expresia:

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\nu - 1}{2} M_\infty^2 (1 - V_c^2) \right]^{\frac{\nu}{\nu-1}} - 1 \right\} \tag{13}$$

4. REZULTATE OBŢINUTE

Programul de calcul PVSF, conceput pe baza metodei expuse anterior, a fost testat pentru următoarele cazuri: (a) cerc de rază unitate, (b) cazul test Williams pentru un profil cu flaps, (c) profilul NACA 23012 şi (d) mişcarea compresibilă subcritică pentru profilul RAE 2814.

(a) Rezultatele numerice obţinute cu programul PVSF au fost comparate cu soluţia exactă pentru cazul mişcării incompresibile în jurul cercului. În tabelul 1 sînt prezentate valorile erorilor maxime obţinute pentru diverse discretizări uzuale. Erorile au fost calculate cu formulele:

$$\varepsilon_1 = \max \left\{ \frac{|V_{ex} - V|}{|V_{ex}|} \right\} \tag{14a}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\max |V_{ex} - V|}{\max |V_{ex}|} \tag{14b}$$

în care V_{ex} reprezintă viteza pe cerc, soluția exactă, iar V reprezintă viteza calculată tot în punctul respectiv cu programul PVSF. Se poate observa o ușoară scădere a erorii prin creșterea numărului de elemente de

Tabelul 1

Erori ale metodei pentru cazul cercului la incidența 6°

Nr. segmente	58	86	118
ε_1	$0,56 \cdot 10^{-1}$	$0,51 \cdot 10^{-1}$	$0,42 \cdot 10^{-1}$
ε_2	$0,237 \cdot 10^{-2}$	$0,159 \cdot 10^{-2}$	$0,116 \cdot 10^{-2}$
Timp rulare	16s	48s	99s

frontieră la incidența de 6°. În urma experimentelor numerice au fost observate erori maxime în jurul punctului de impact, valorile variind între $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-12}$ și $\varepsilon_1 = 8 \cdot 10^{-2}$ pe măsură ce incidența crește de la 0° la 12°. Mărimea erorilor este suficient de mică dacă se utilizează circa 120 de segmente. Acest aspect este important și din punct de vedere a timpului de calcul care nu depășește în acest caz 100 s pe calculatorul CYBER—720/120.

(b) Configurația A propusă de Williams [6] reprezintă soluția exactă a mișcării în jurul unui profil cu flaps bracat la 30°, vezi figura 3. Comparația dintre valorile obținute cu ajutorul programului PVSF și valorile exacte ale coeficientului de presiune c_p este redată în figura 4. Se observă o foarte bună concordanță a valorilor figurate, deși au fost utilizate pentru discretizare doar 60 de segmente pentru profilul principal și 48 de segmente pentru flaps. Singura diferență se poate semnala în zona bordului de atac al flapsului unde nu este prins saltul mare de presiune datorită discretizării. Și valorile integrate, C_L și C_D indică o foarte bună concordanță.

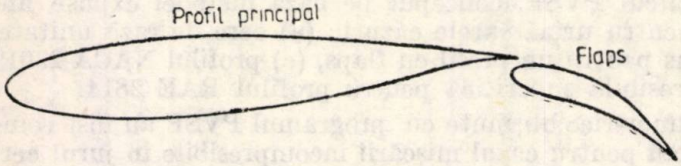


Fig. 3. — Geometrie profil cu flaps bracat la 30° (configurația A).

(c) În figura 5 sînt prezentate comparativ rezultatele obținute cu metoda propusă alături de cele obținute cu alte două metode, pentru profilul NACA 23012. Cele două metode amintite sînt : metoda transformărilor conforme și metoda neliniară Weber [13] și [14]. Metoda transformărilor conforme este considerată ca exactă mai ales datorită utilizării transformatei Fourier rapidă [12]. Se observă și în acest caz, incidența 6°, o foarte bună concordanță a rezultatelor mai ales între metoda propusă și cea a transformărilor conforme. Metoda Weber dă rezultate

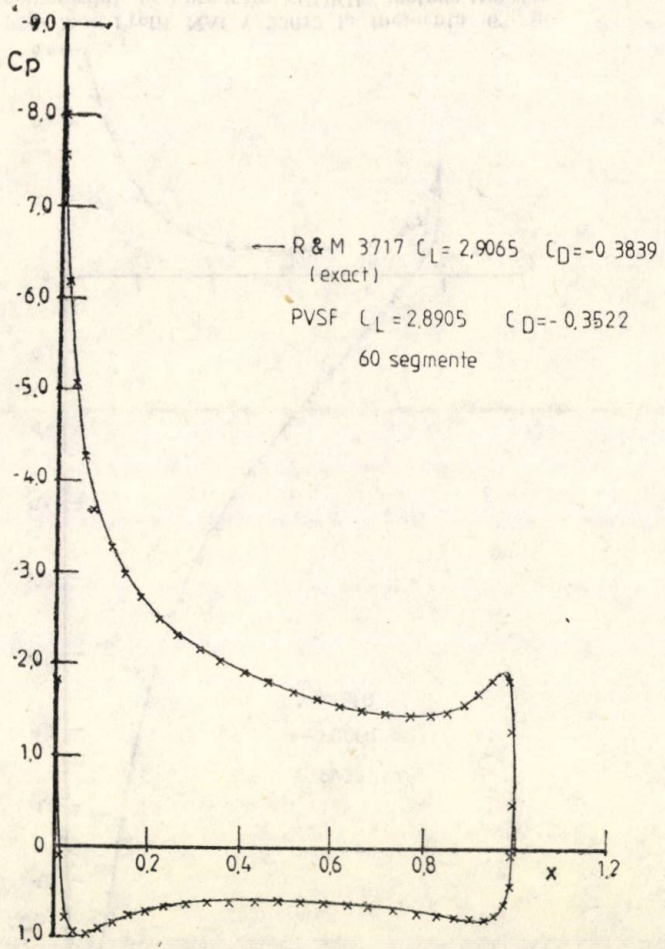


Fig. 4a. — Distribuție de presiuni pe profilul principal la incidența 0°.

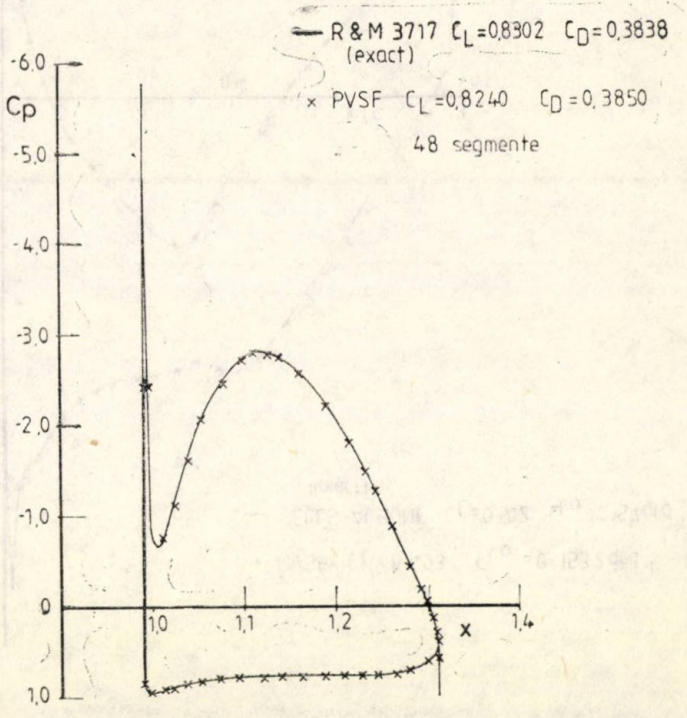


Fig. 4b. — Distribuție de presiuni pe flaps la incidența 0°.

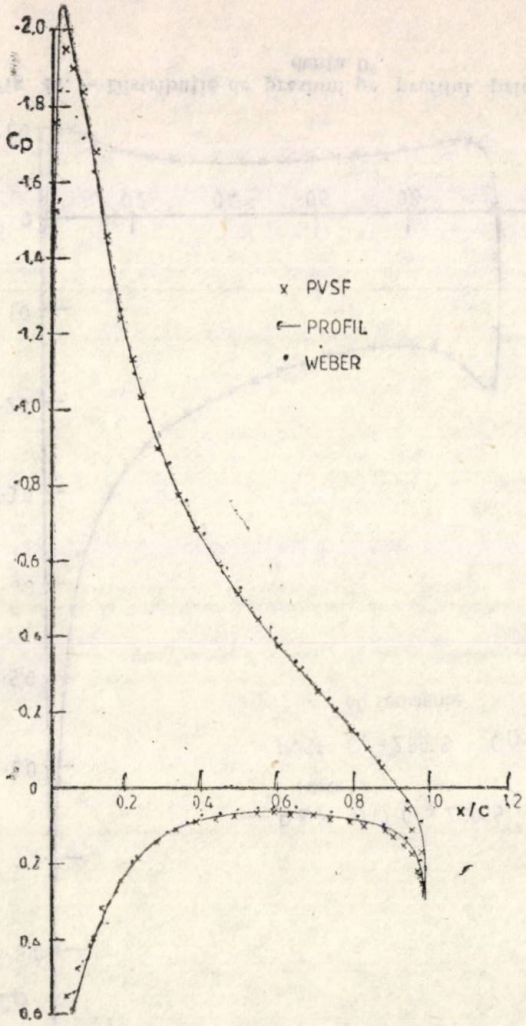


Fig. 5. — Profil NACA 23012 la incidența 6° incompresibil (—) program PROFIL metoda transformărilor conforme. (·) program Weber, (×) program PVSF.

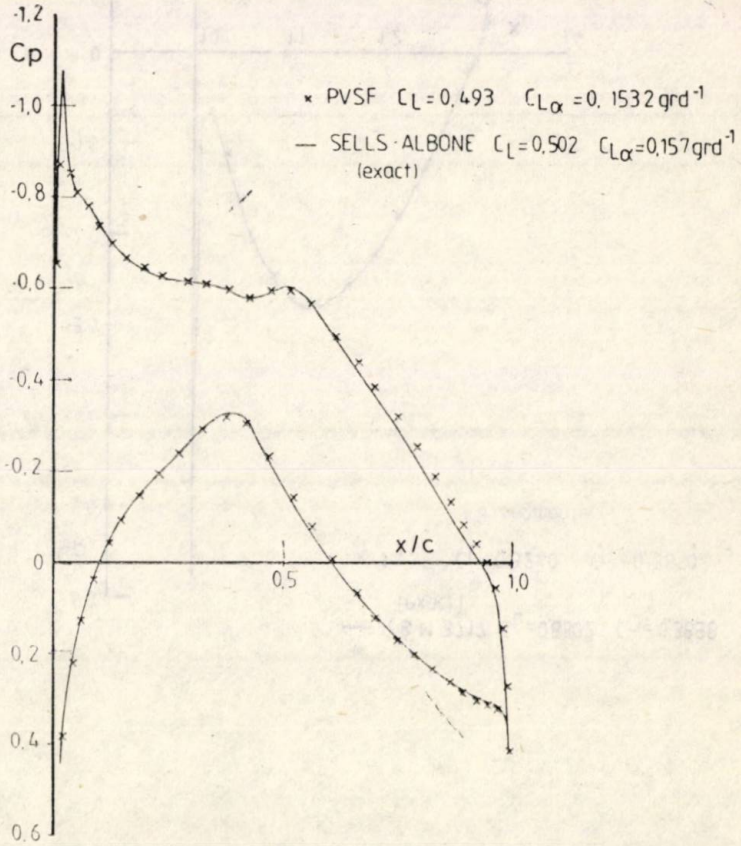


Fig. 6. — Profil RAE 2814 la incidența 1,5° compresibil M = 0,601 (—) metoda Sells-Albone, (×) program PVSF cu corecția Wilby.

mai puțin bune mai ales în zona bordului de atac, datorită ipotezelor din teoria profilelor subțiri.

(d) Rezultatele reprezentate în figura 6 au fost obținute pentru profilul RAE 2814 în condițiile de mișcare subcritică, M = 0,601 și incidența 1,5°. Comparația este făcută între rezultatele obținute cu metoda propusă în care se face corecția Wilby și metoda exactă Sells-Albone [15] de rezolvare a ecuației complete a mișcării compresibile potențiale. Din exemplul prezentat se observă o mare acuratețe obținută prin utilizarea corecției Wilby.

Un caz deosebit de interesant este cel al mișcării în jurul unui profil în prezența solului. Acest caz a fost redus pe baza principiului simetriei la cazul mișcării în jurul a două profile identice așezate simetric față de linia solului. Pentru exemplificare a fost luat profilul simetric NACA 0012 care a fost calculat la diverse incidențe și distanțe h/c față de sol. Figura 7a prezintă comparativ distribuția de presiuni pe profil la incidența nulă cu și fără efectul solului. Diferența foarte mare de presiuni de pe intradosul profilului este datorată efectului de ajutaj și duce la portante negative pentru cazul considerat $h/c = 0{,}2$. Fascicolul de drepte din figura 7b reprezintă variația coeficientului de portantă C_L a profilului, funcție de incidența și de poziția față de sol. Se observă că panta $dC_L/d\alpha$ este mai mare pe măsură ce distanța față de sol scade, creșterile fiind substanțiale.

5. CONCLUZII

A fost dezvoltată o metodă simplă și suficient de exactă de calcul a mișcării potențiale în jurul profilelor multiple. Exactitatea ei, pentru mișcările incompresibile, a fost dovedită prin compararea cu soluții exacte existente sau cu rezultate obținute cu metode consacrate. Metoda propusă poate fi utilizată cu succes și multă ușurință pentru calculul mișcării subcritice cu ajutorul corecției Wilby.

Prin supleța, simplitatea și exactitatea ei, metoda se impune ca o unealtă bună pentru calcule inginerești. Ea poate fi utilizată cu ușurință pentru calculul mișcării vîscoase cu metoda interacțiunii vîscos-nevîscos și pentru proiectarea profilelor aerodinamice folosind în acest scop modificarea condiției la limită cu „viteza de transpirație".

Primit în redacție la 26 noiembrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Edit. Academiei, București, 1981.
2. J. L. HESS, A. M. O. SMITH, *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies*, Progress in Aeronautical Science, vol. 8, Pergamon Press, New-York, 1967, p. 1—138.
3. F. A. DVORAK, F. A. WOODWARD, *A Viscous/Potential Flow Interaction Analysis Method for Multi-Element Infinit Swept Wings*, NASA CR—2476, 1974.
4. J. L. KENNEDY, D. J. MARSDEN, *Potential Flow Velocity Distributions on Multi-Component Airfoil Sections*, Canadian Aeronautics and Space Journal, **22**, 9, (1976).

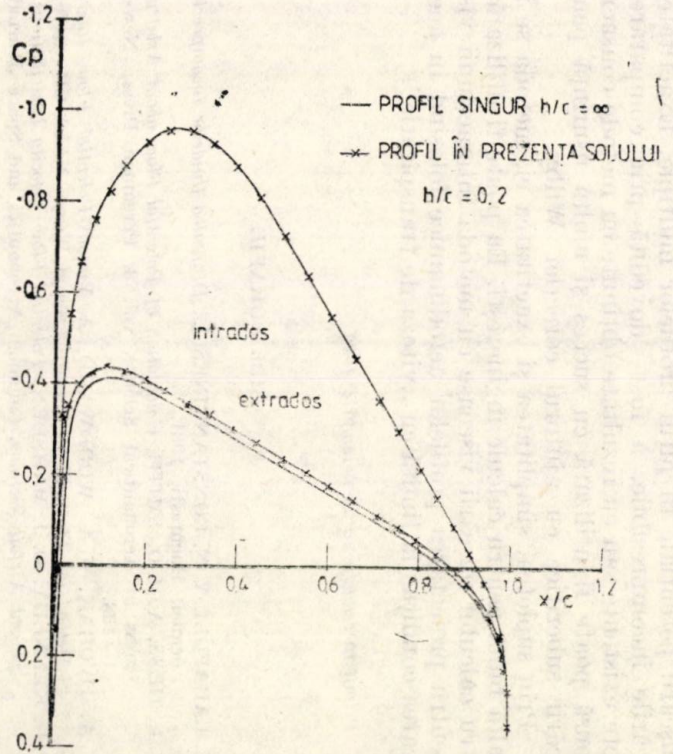


Fig. 7a. — Profil NACA 0012 la incidența 0° (—) curent nelimitat, (—×—) în vecinătatea solului $h/c = 0{,}2$.

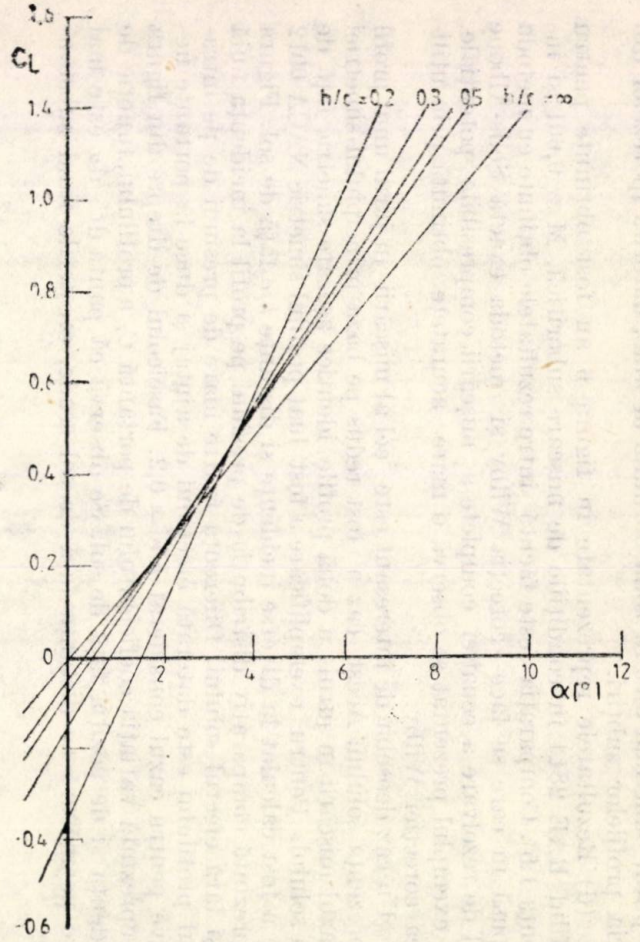


Fig. 7b. — Efectul solului asupra portanței profilului NACA 0012.

5. J. L. HESS, *Higher Order Numerical Solution of Integral Equation for the Two-Dimensional Neumann Problem*, Computer Methods in Applied Mech. and Engineering, **2**, *1* (1973).
6. B. R. WILLIAMS, *An Exact Test Case for the Plane Potential Flow about Two Adjacent Lifting Aerofoils*, RAE, R& M—3717, 1971.
7. A. SUDDHOO, I. M. HALL, *Test Case for the Plane Potential Flow Past Multi-Element Aerofoils*, Aeronautical Journal, **12** (1985).
8. D. R. N. CHEN, M. J. SHEN, *Investigation of Internal Singularity Methods for Multielement Airfoils*, J. of Aircraft, **26**, *2* (1989).
9. L. DRAGOŞ, *Boundary element methods (BEM) in the theory of thin airfoils*, Rev. Roum. Math. Pures, Appl., **34**, *6* (1989).
10. C. A. BREBBIA, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1980.
11. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor compresibile*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1984.
12. D. C. IVES, *A Modern Look at Conformal Mapping Including Multiply Connected Regions*, AIAA Journal, **14**, *8* (1974).
13. J. WEBER, *The Calculation of the Pressure Distribution over the Surface of Two Dimensional and Swept Wings with Symetrical Aerofoil Section*, RAE, R & M—2918, 1953.
14. J. WEBER, *The Calculation of the Pressure Distribution on the Surface of Thick Cambered Wings and the Design of Wings with Given Pressure Distribution*, RAE, R & M—3026, 1955.
15. — *First-order Method for Estimating the Subcritical Pressure Distribution on a Two-Dimensional Aerofoil in Compressible Viscous Flow*, ESDU, TDM—76002, 1975.

DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII ÎN BUCȘELE ELASTICE CU NERVURI DIN STRUCTURA DISPOZITIVELOR AUTOCENTRANTE, FOLOSIND METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

de N. GHERGHEL și L. SEGAL

Institutul Politehnic „Gh. Asachi", Iași

Se prezintă rezultatele cercetărilor privind determinarea stării de tensiuni și deformații în bucșele elastice cu nervuri din structura dispozitivelor autocentrante pentru prinderea pieselor la operațiile de prelucrare, măsurare și asamblare, pe baza metodei elementelor de frontieră în formularea directă.
Problema a fost asimilată cu o problemă de elasticitate plană și pentru rezolvare s-a folosit programul de calcul ELBIBEM.
Cu valorile obținute s-au trasat deformanta bucșei și diagramele tensiunilor normale pe contur și a celor tangențiale, punîndu-se în evidență zonele puternic solicitate. Rezultatele concordă cu cele obținute experimental, metoda dovedindu-se avantajoasă și în rezolvarea unor astfel de probleme.

1. INTRODUCERE

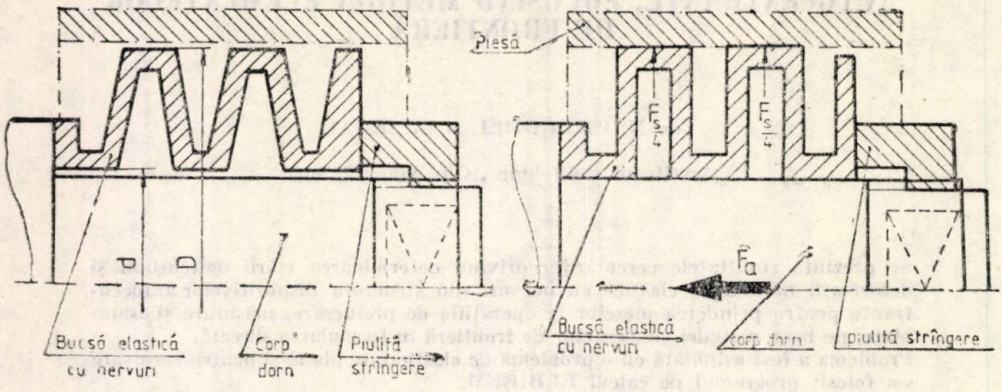
Una din categoriile de mecanisme de centrare-strîngere cu elemente elastice este cea cu bucșe elastice cu nervuri (gofrate, burduf). Acestea s-au impus în ultimul timp datorită avantajelor pe care le oferă, dintre care mai importante sînt : precizie de centrare-strîngere ridicată ; simplitate constructiv-tehnologică ; siguranță mare în exploatare [1, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13].

Domeniul principal de utilizare al acestor mecanisme îl constituie dispozitivele de tipul dornurilor autocentrante pentru piese cu pereți subțiri, ușor deformabile la prelucrările cu regimuri ușoare, în special, pe strunguri și mașini de rectificat rotund, la producția de serie mare și de masă [1, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13].

Modul de utilizare a acestui tip de bucșă este ilustrat în figura 1, în care este prezentată schema de principiu a construcției și funcționării unui mecanism de centrare-strîngere cu o bucșă elastică cu nervuri în varianta de dorn, cu acționare manuală [1, 3, 5, 10, 11, 13].

Deși aceste mecanisme se utilizează din ce în ce mai mult, analiza literaturii de specialitate [1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13], conduce la concluzia că lipsesc, încă, multe date de proiectare, iar cele existente au un grad de generalitate redus [9]. Lipsa, încă, a acestor date se datorează, după părerea noastră, formei constructive a bucșelor elastice cu nervuri.

Cercetările efectuate în ultimii ani în cadrul Catedrei de Mașini-Unelte și Scule a Institutului Politehnic „Gh. Asachi" din Iași au vizat determinarea pe cale teoretică și experimentală a dependenței dintre cursa de acționare c_a (deformația axială x) și cursa de strîngere c_s (deformația radială y), a dependenței dintre forța de acționare (forța axială) F_a și forța de strîngere (forța radială) F_f, a stării de tensiuni (eforturi) și a rezistenței la oboseală [4].



a. slăbit b. strîns

Fig. 1

În lucrarea de față se prezintă unele din rezultatele cercetărilor privind aplicarea metodei elementelor de frontieră pentru determinarea stării de tensiuni (eforturi) și a deplasărilor (deformațiilor) în bucșele elastice cu nervuri din structura mecanismelor de centrare și strîngere (autocentrante).

Cercetările anterioare [4] au dovedit că cunoașterea stării de tensiuni și a deplasărilor în bucșele elastice cu nervuri este mai dificilă. Metodele teoretice cunoscute permit determinarea tensiunilor și deformațiilor, în punctele ce interesează, cu un anumit grad de aproximație. Metoda elementelor finite (MEF) oferă posibilități largi de calcul, dar prezintă inconveniente în analiza concentrărilor de tensiune în zonele de contact și de racordare. Pentru rezolvarea cît mai riguroasă a problemei, se utilizează discretizări cu un număr mare de noduri și elemente finite, ce conduc la un consum mare de timp de calcul. Metoda elementelor de frontieră (MEFr) elimină aceste dezavantaje, deoarece cu o discretizare simplă și deci cu un număr redus de date inițiale, se obțin valorile tensiunilor și deplasărilor pe contur, în punctele de discretizare.

2. ALEGEREA VARIANTEI METODEI

Metoda elementelor de frontieră (MEFr), dezvoltată cu precădere în ultimul deceniu, este o metodă aproximativă de soluționare a problemelor la limită. Metoda se dovedește superioară, sub anumite aspecte, diferitelor variante ale metodei elementelor finite (MEF), fapt ce-i conferă un interes practic deosebit.

Deoarece există clase de probleme pentru care MEF nu dă rezultate satisfăcătoare sau cere un important efort de calcul, s-a ajuns la rezolvarea acestor probleme prin metodele bazate pe ecuațiile integrale.

În esență, MEFr, utilizînd o soluție a ecuației omogene asociate sau o soluție fundamentală a ecuației date, reduce problema la o ecuație integrală pe frontiera domeniului. Prin integrarea numerică (sau analitică) a acestei ecuații integrale pe frontieră — care pretinde o discretizare doar

a frontierei — se obțin datele necesare, care permit, prin intermediul unei reprezentări integrale asociate ecuației date, calculul soluției în orice punct al domeniului. Ecuația integrală pe frontieră, pe lîngă faptul că micșorează cu o unitate dimensiunile problemei de rezolvat, incorporează și condițiile la limită asociate pentru care nu vor fi necesare relații speciale. De aceea, MEFr se poate aplica, fără o pregătire prealabilă, și domeniilor infinite, condițiile de la infinit fiind înglobate în ecuația integrală respectivă. MEFr își are, deci, originea în fizica matematică, în metoda ecuațiilor integrale, metoda integralelor de frontieră și metoda funcției Green. În privința stabilirii ecuațiilor integrale pe frontieră — esența MEFr — se pot utiliza diferite metode cum ar fi : principiul lucrului virtual, teorema Green, identitatea Somigliana și teorema Betti etc. O formulare unitară-superioară prin generalitatea acesteia — se poate obține prin exprimarea rezidual-ponderată a problemei.

MEFr prezintă următoarele avantaje principale : reducerea sistemului de ecuații ; prepararea simplă a datelor ; modelarea corectă a problemelor infinite și semifinite : calculul cu precizie a tensiunilor interioare și a deplasărilor ; rezolvarea cu eficacitate a concentrărilor de tensiuni. Însă, avantajul cel mai important al MEFr îl constituie reducerea problemelor bi și tridimensionale la probleme uni și bidimensionale.

Datorită avantajelor pe care le prezintă, MEFr s-a impus în rezolvarea unor probleme cum sînt [2] : probleme de contact elastic fără și cu frecare ; analiza stării de tensiuni și de deformații ; analiza distribuției de temperatură în regim permanent și tranzitoriu.

Totodată, datorită complexității problemelor din natură, prin prezența simultană a unor structuri și sisteme mult diferite prin proprietățile acestora, ce impun o tratare diferențiată, în vederea obținerii unor soluții cît mai fidele realității, se impune cuplarea MEFr cu MEF. În acest context, MEF este ușor de aplicat, cu foarte bune rezultate, de exemplu, în probleme care prezintă anizotropii, însă nu poate fi utilizată la unele probleme cu singularități geometrice (tăieturi sau unghiuri concave), cum apar în mecanica „rupturilor". De asemenea, MEF este incomodă pentru domenii nemărginite sau cu concentrări de tensiuni sau fluxuri. În rezolvarea acestor ultime tipuri de probleme, se recomandă utilizarea MEFr. Rezultă că este posibilă cuplarea celor două metode.

Ținînd seama de aceste considerente, pentru rezolvarea problemei propuse, s-a ales MEFr.

După modul de formulare a MEFr, aceasta prezintă trei variante și anume : formularea directă, formularea semidirectă și formularea indirectă.

Pentru cercetarea propusă, am optat pentru *formularea directă*. În acest caz, funcțiile necunoscute care apar în ecuațiile integrale sînt variabilele fizice reale ale problemei. Astfel, în problemele de elasticitate, acestea vor fi deplasările (deformațiile) și tensiunile (eforturile) pe contur. Deplasările și tensiunile din interiorul corpului sînt deduse din valorile determinate pe contur, prin integrare numerică.

Pentru formularea directă a MEFr, se utilizează *teorema reciprocă* (*legea repartiției lui Betti*). Teorema reciprocă realizează legătura între soluțiile a două probleme cu valori pe contur diferite pentru același domeniu și este o consecință directă a liniarității ecuațiilor de echilibru static

(ecuațiile lui Navier) și a ecuațiilor fizice (legea lui Hooke generalizată). *Expresia matematică a teoremei* este [2]:

$$\int_S (\tau_s u'_s + \sigma_n u'_n)\,dS = \int_S (\tau'_s u_s + \sigma'_n u_n)\,dS, \qquad (1)$$

în care: u_s, u_n, u'_s, u'_n reprezintă deplasările în cele două probleme pe frontiera S; τ_s, σ_n, τ'_s, σ'_n — tensiunile în cele două probleme pe frontiera S.

Pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor într-un punct interior, se folosesc *formulele lui Somigliana*. În sistemul de coordonate xOy, deplasările după cele două direcții, într-un punct interior P, sînt:

$$u_x(P) = -\int_S [u_s \tau'_s(F_x) + u_n \sigma'_n(F_x)]\,dS + \int_S [\tau_s u'_s(F_x) + \tau_n u'_n(F_x)]\,dS; \qquad (2)$$

$$u_y(P) = -\int_S [u_s \tau'_s(F_y) + u_n \sigma'_n(F_y)]\,dS + \int_S [\tau_s u'_s(F_y) + \tau_n u'_n(F_y)]\,dS, \qquad (3)$$

în care: u_s, u_n, τ_s, σ_n reprezintă deplasările, respectiv tensiunile pe frontieră; $u'_s(F_c)$, $u'_n(F_c)$, $\tau'_s(F_c)$; $\sigma'_n(F_c)$ — deplasările, respectiv tensiunile tangente la și normale pe frontiera S, date de o forță concentrată $F_c = (F_x, F_y) = (1,1)$ în punctul P.

Tensiunile într-un punct interior P se obțin prin derivarea expresiilor deplasărilor conform ecuațiilor geometrice și utilizarea ecuațiilor fizice (legea lui Hook generalizată).

3. SCHEMA DE REZEMARE ȘI ÎNCĂRCARE. DISCRETIZAREA FRONTIEREI

Schema de rezemare și încărcare, precum și dimensiunile bucșei elastice cu nervuri luată în studiu sînt prezentate în figura 2.

Deoarece bucșa prezintă simetrie geometrică și de încărcare față de axa x (axa bucșei), studiul cu MEFr se face pe semistructură, punîn-

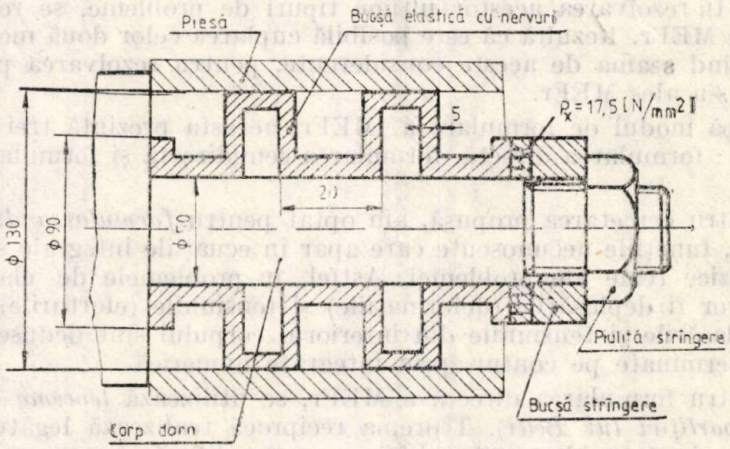


Fig. 2

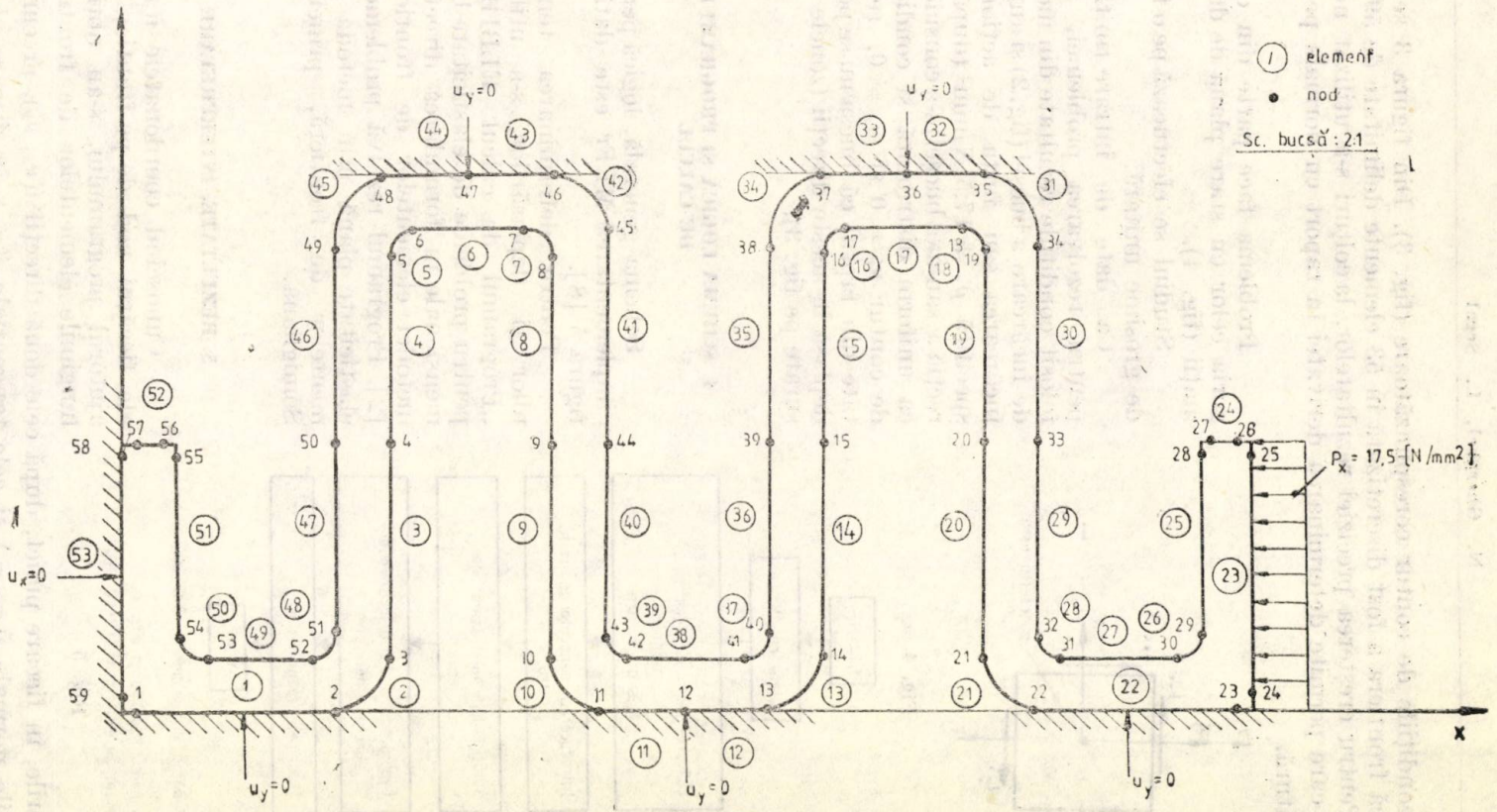


Fig. 3

du-se condițiile de contur corespunzătoare (fig. 3). Din figura 3 se observă că frontiera a fost discretizată în 53 elemente delimitate de 59 noduri. Pentru creșterea preciziei rezultatelor, la colțuri s-a utilizat nodul dublu, care permite determinarea derivatei în raport cu normala pe fiecare latură.

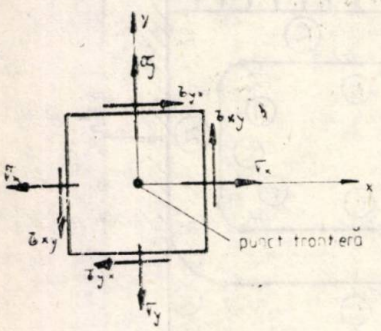
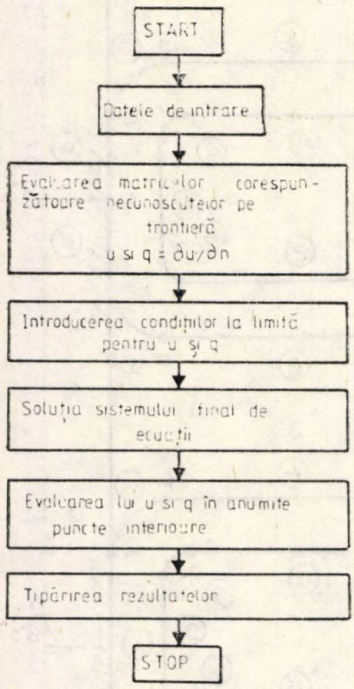


Fig. 4


START
Datele de intrare
Evaluarea matricelor corespunzătoare necunoscutelor pe frontieră
u si q = ∂u/∂n
Introducerea condițiilor la limită pentru u și q
Soluția sistemului final de ecuații
Evaluarea lui u si q în anumite puncte interioare
Tipărirea rezultatelor
STOP

u = deplasarea după o direcție într-un punct interior
q = tensiunea într-un punct interior
n = normala pe elementul de frontieră

Fig. 5

Problema face parte din categoria celor cu stare plană de deformații (fig. 4).

Studiul se efectuează pe o fășie de grosime unitară.

Ca date de intrare (inițiale) pentru rezolvarea problemei, s-au folosit condițiile rezultate din modul de încărcare a bucșei (fig. 2) și anume încărcarea sau forța de acționare specifică $p_x = 17{,}5$ N/mm² (după direcția x sau axa bucșei) s-a considerat ca uniform distribuită și condițiile de contur $u_y = 0$ și $u_x = 0$, rezultate din faptul că bucșa nu se poate deplasa în aceste direcții (zonele hașurate pe fig. 3).

4. SCHEMA LOGICĂ ȘI PROGRAMUL DE CALCUL

Schema generală, logică pentru implementarea MEFr este dată în figura 5 [8].

Pentru determinarea tensiunilor și deplasărilor, s-a utilizat „Programul de calcul ELBIBEM pentru probleme de elasticitate bidimensionale în formularea directă a metodei elementelor de frontieră" [2]. Programul rezolvă probleme de elasticitate plană prin metoda elementelor de frontieră, principiul Somigliana.

5. REZULTATE. INTERPRETARE

Cunoscînd coordonatele $i(x, y)$ ale fiecărui nod de pe frontieră, cu ajutorul programului, s-au obținut lungimile elementelor de frontieră, deplasările, în fiecare punct, după cele două direcții $i(u_x, u_y)$, precum și tensiunile normale $i(\sigma_x, \sigma_y)$ și cele tangențiale $i(\tau_{xy})$ în fiecare nod i.

Dimensiunile și deplasările au fost exprimate în mm, iar valorile tensiunilor au rezultat în N/mm².

Cu valorile deplasărilor după direcțiile x și y ale fiecărui nod i, s-a trasat *deformata bucșei elastice cu nervuri* (fig. 6). Se observă valori mai mari ale deplasărilor (deformațiilor) după direcția x în nodurile (punctele) 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 și 32, datorită acțiunii directe a forței de acționare specifice p_x.

De asemenea, au fost trasate *diagramele tensiunilor* (*eforturilor*) *normale* σ_x semnificative (fig. 7) și σ_y (fig. 8) ale fiecărui nod pe conturul exterior și interior al bucșei elastice cu nervuri. Din analiza diagramei tensiunilor normale σ_x (fig. 7), rezultă că valori mari ale tensiunii σ_x se constată în zona nodurilor 11—12—13, zonă intens supusă la eforturi normale de compresie: $\sigma_x = -800,32$ N/mm² în nodul 11, $\sigma_x = -369,65$ N/mm² în nodul 12 și $\sigma_x = -426,96$ N/mm² în nodul 13, datorate contactului dintre bucșa elastică cu nervuri și corpul dornului (fig. 2). De asemenea, se constată valori mari în zona nodurilor 43—42—41—40, zonă supusă la eforturi normale de întindere și compresie: $\sigma_x = 513,65$ N/mm² în punctul 42, $\sigma_x = 346,78$ N/mm² în punctul 43, $\sigma_x = -300,48$ N/mm² în punctul 40 și $\sigma_x = -133,60$ N/mm² în punctul 41. Rezultă că zona cuprinsă între nodurile 40—41—42—43, respectiv zona cuprinsă între nodurile 10—11—12—13—14 sînt zonele cele mai solicitate din punct de vedere al tensiunilor normale σ_x. Datorită contactului dintre bucșa elastică cu nervuri și partea cilindrică, respectiv cea frontală a corpului dornului (fig. 2) și acțiunii forței specifice de acționare p_x, variații ale tensiunii normale σ_x se pot observa și în zona nodurilor 58—59, 1—2—3, 21—22—23 și 24—25—26 (fig. 7). Variații mai mici ale tensiunii normale σ_x se pot observa și pe fețele bucșei elastice cu nervuri în contact cu piesa prinsă pe bucșă (fig. 2), respectiv în zona nodurilor 46—47—48 și 35—36—37 (fig. 7).

Din studiul diagramei tensiunilor normale σ_y (fig. 8), se constată că zona cea mai intens solicitată este tot cea cuprinsă între nodurile 41—42, respectiv 11—12—13. Valorile maxime ale tensiunii σ_y se înregistrează în nodurile 11—12—13, corespunzătoare punctelor situate pe fața bucșei elastice cu nervuri aflată în contact cu corpul dornului (fig. 2), existînd — după cum se observă pe figura 8 — o variație bruscă a efortului în aceste puncte: $\sigma_y = -934,94$ N/mm² în punctul 11, $\sigma_y = 1981,40$ N/mm² în punctul 12, $\sigma_y = -1189,96$ N/mm² în punctul 13. Valori mari ale tensiunii normale σ_y se pot observa și în zona nodurilor 32—33—34, 38—39—40, 43—44—45 și 3—4—5 (fig. 8) de pe fețele libere ale bucșei elastice cu nervuri (fig. 2), datorate deformației acesteia. De asemenea, variații ale tensiunii normale σ_y mai apar și în zona nodurilor de pe fețele bucșei elastice aflate în contact cu piesa prinsă pe aceasta (fig. 2, fig. 8), zonele de compresie alternînd cu zone de întindere.

Cu datele obținute cu ajutorul programului de calcul, s-au trasat și diagramele tensiunilor tangențiale τ_{xy} după cele două direcții, din a căror analiză au rezultat concluzii asemănătoare.

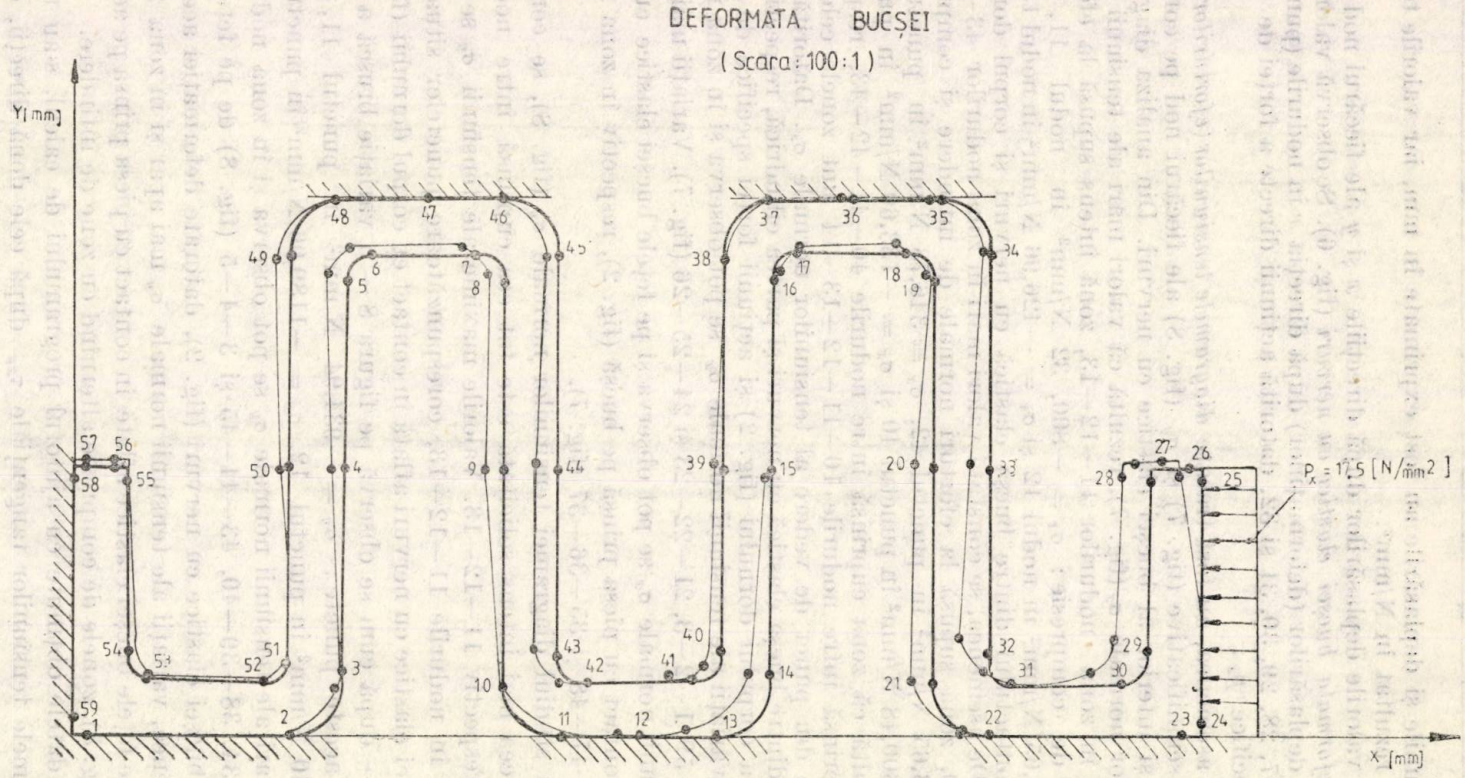


Fig. 6

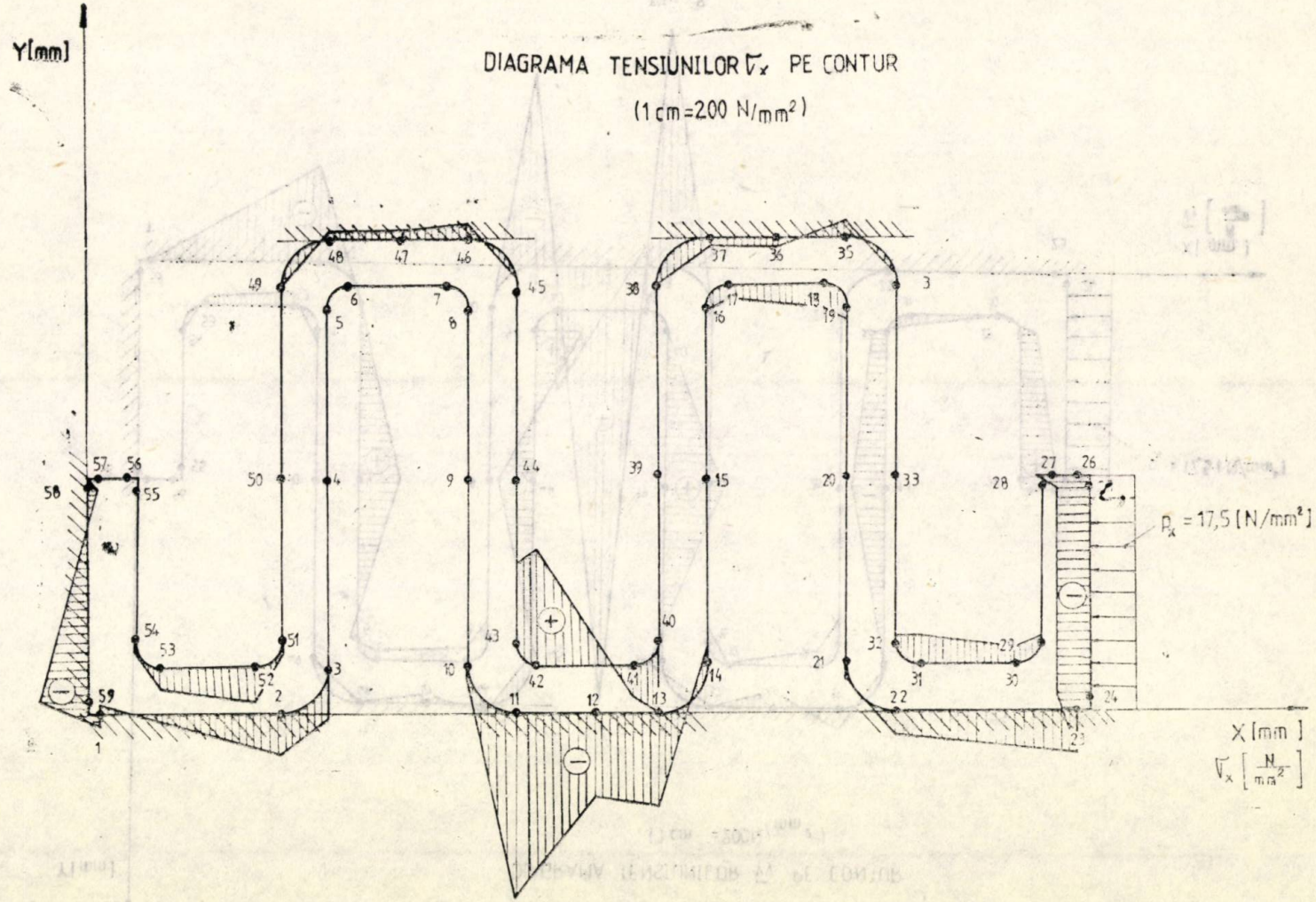

Y[mm]
DIAGRAMA TENSIUNILOR σ_x PE CONTUR
(1 cm=200 N/mm²)
p_x = 17,5 [N/mm²]
X [mm]
$\sigma_x \left[\frac{N}{mm^2}\right]$

Fig. 7

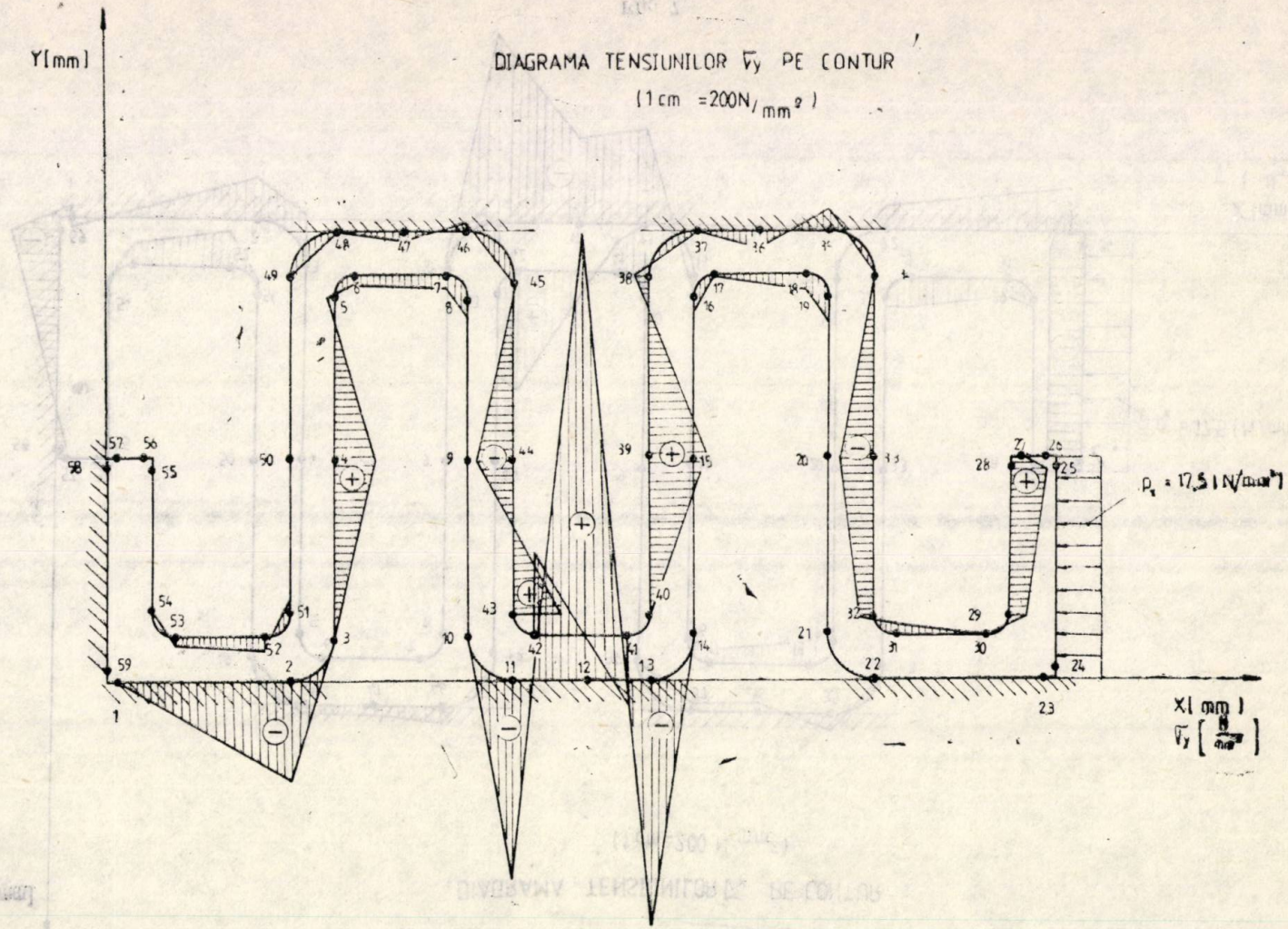

Y[mm]
DIAGRAMA TENSIUNILOR $\bar{\sigma}_y$ PE CONTUR
(1 cm = 200N/mm²)
p_i = 17,5 N/mm²
X[mm]
$\bar{\sigma}_y$ [N/mm²]

Fig. 8

6. CONCLUZII

Metoda elementelor de frontieră (MEFr) s-a dovedit avantajoasă în studiul efectuat, deoarece cu un număr redus de date de intrare, cu discretizare simplă doar pe frontiera domeniului, se pune în evidență starea de tensiuni (eforturi) și deplasările (deformațiile) bucșelor elastice cu nervuri din structura dispozitivelor de prindere autocentrante de tip dorn. Timpul de calcul consumat pentru obținerea rezultatelor este mult mai mic decît în cazul utilizării metodei elementelor finite (MEF). De asemenea, erorile care pot apare la introducerea datelor, la aplicarea MEFr, pot fi ușor depistate și îndepărtate, în comparație cu MEF.

Rezultatele privind starea de tensiuni și de deformații a bucșei elastice cu nervuri, obținute prin aplicarea MEFr, concordă, în mare măsură, cu datele obținute pe cale experimentală, prin fotoelasticitate [4].

Pe baza deformației bucșei elastice cu nervuri, obținută prin aplicarea MEFr, se poate determina cursa de strîngere în funcție de cursa de acționare, aceasta din urmă fiind dependentă, la rîndul său, de forța specifică de acționare aplicată pe direcția axială a bucșei.

Analiza stării de tensiune ce ia naștere în bucșa elastică cu nervuri după aplicarea forței de acționare, oferă informații utile cu privire la zonele cele mai puternic solicitate. O importanță deosebită prezintă, în special, zonele bucșei aflate în contact cu piesa prinsă (centrată și strînsă), precum și dintre bucșa și corpul dornului pe care bucșa se centrează și se sprijină axial. Starea de tensiuni oferă informații și asupra uniformității strîngerii piesei și, legat de aceasta, asupra preciziei de strîngere. De asemenea, pe baza datelor obținute, privind tensiunile (eforturile) în zonele de contact ale bucșei elastice cu nervuri cu piesa prinsă (centrată și strînsă) pe aceasta, se poate stabili și corelația dintre forța de acționare F_a și forța de strîngere F_s (fig. 1).

Rezultatele obținute stau și la baza perfecționării soluțiilor constructive de bucșe elastice cu nervuri, în sensul uniformizării stării de tensiuni și deformații, în special, în zonele de contact cu piesa ce se prinde (centrează și strînge) cu ajutorul bucșelor. În felul acesta, rezultatele cercetărilor întreprinse contribuie la logicizarea activităților de concepție și proiectare a mecanismelor de centrare-strîngere echipate cu astfel de bucșe, la punerea pe baze științifice a acestor activități.

Primit în redacție la 20 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. ANSEROV, *Prisposobleniia dlia metallorejuşcih stankov*, Mașinostroenie, Leningrad, 1975.
2. M. GAFIȚANU, V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Elemente finite și de frontieră cu aplicații în calculul organelor de mașini*, Edit. tehnică, București, 1987, p. 155–199.
3. N. GHERGHEL, *Construcția și exploatarea dispozitivelor*, vol. 2, Instit. Politehnic Iași, 1981.
4. N. GHERGHEL, N. GOJINEȚCHI, A. MITROFAN, I. ALECU, C. FLORESCU, A. CRUDU, *Cercetări teoretico-experimentale asupra bucșelor elastice cu nervuri uti-*

lizate în construcția dispozitivelor autocentrante, Bul. Șt. Stud. al Instit. Politehnic Iași, **XIII** (1988).
5. N. GOJINEȚCHI, N. GHERGHEL, *Proiectarea dispozitivelor*, 1, Instit. Politehnic, Iași, 1983.
6. H. MAURI, *Vorrichtungsbau*, vol. I, II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
7. I. PASCARU, *Elemente finite. Concepte. Aplicații*, Edit. Militară, București, 1985, p. 178—183.
8. T. PETRILĂ, C. GHEORGHIU, *Metode element finit și aplicații*, Edit. Academiei, București, 1987, p. 215—267; 275—276.
9. B. N. VARDAȘKIN, V. V. DANILEVSKII, A. A. ȘATILOV, *Stanocinie, prisposobleniia*, 2, Mașinostroenie, Leningrad, 1984.
10. I. STĂNESCU, V. TACHE, *Dispozitive pentru mașini-unelte*, Edit. tehnică, București, 1979.
11. V. TACHE, I. UNGUREANU, A. BRĂGARU, N. GOJINEȚCHI, N. GHERGHEL, I. MARINESCU, V. ȘUTEU, SILVIA DRUȚU, *Construcția și exploatarea dispozitivelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1982.
12. V. TACHE, I. UNGUREANU, C. STROE, *Elemente de proiectare a dispozitivelor pentru mașini-unelte*, Edit. tehnică, București, 1985.
13. SANDA VASII-ROSCULEȚ, N. GOJINEȚCHI, C. ANDRONIC, M. ȘELARIU, N. GHERGHEL, *Proiectarea dispozitivelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1982.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL VIBRAȚIILOR MEMBRANELOR CIRCULARE UTILIZÎND VARIANTA NUMERICĂ A METODEI DELTA

de E. DEGIU, M. PREDOI și DANIELA CRĂIȚA CARP-CIOCÂRDIA

Institutul Politehnic din București

În lucrare se analizează pulsațiile și formele proprii ale unei membrane elastice circulare axial simetrice, în mai multe condiții de rezemare, folosind varianta numerică a metodei delta. De asemenea se studiază membrana în forma de coroană circulară. Rezultatele obținute sînt prezentate sub formă adimensională.

1. GENERALITĂȚI

Studiul vibrațiilor transversale ale membranelor circulare se efectuează cu ecuația cu derivate parțiale a deplasărilor pe direcția normală la membrană, direcție aleasă ca axă Oz:

$$\Delta w = \frac{\mu}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

unde w este deplasarea verticală a unui punct al membranei;
μ — masa unității de suprafață a membranei;
N — tensiunea pe unitatea de lungime a conturului membranei.

Se caută o soluție armonică de forma:

$$w = W \sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

în care $W(r, \theta)$ este funcția formelor proprii.

Ecuația (1) scrisă în coordonate cilindrice r, θ, z are forma:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\mu \omega^2}{N} W = 0. \tag{3}$$

Întrucît W este o funcție armonică în θ pentru membrana circulară axial simetrică, perioada fiind 2π, se poate scrie:

$$W = R_n(r) \cos(n\theta) \tag{4}$$

în care $R_n(r)$ este o funcție numai de r.

Înlocuind în (3) se obține o ecuație diferențială neliniară tip Bessel [2], [3]:

$$\rho^2 R_n'' + \rho R_n' + (\rho^2 - n^2) R_n = 0 \tag{5}$$

unde s-au notat: n = ordinul soluției;

$$\rho = r \sqrt{\mu \omega^2 / N} \tag{6}$$

ρ fiind raza exprimată sub formă adimensională.

Soluţia analitică a ecuaţiei (5), aşa cum se cunoaşte, se poate scrie utilizînd funcţiile Bessel.

În continuare pentru a se ajunge la o formă care se pretează la o soluţie numerică, se face schimbarea de funcţie:

$$R_n = X/\sqrt{\rho} \tag{7}$$

ecuaţia (5) devenind:

$$X'' + (1+q)X = 0 \tag{8}$$

unde s-a notat

$$q = (1/4 - n^2)/\rho. \tag{9}$$

În prezenta lucrare, se urmăreşte integrarea ecuaţiei (5) cu varianta numerică a metodei delta [1].

2. METODA DELTA—VARIANTA NUMERICĂ—DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE NELINIARE DE ORDINUL DOI

Metoda delta este o metodă aproximativă de integrare a ecuaţiilor diferenţiale neliniare de ordinul doi utilizînd diferenţe finite. Se face ipoteza razei de curbură constante pe un interval de integrare, deci soluţia este aproximată cu o serie de arce de cerc.

Notînd $X' = c \cdot Y$, se obţine ecuaţia:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X + \dfrac{1+q-c^2}{c^2}X}{Y}. \tag{10}$$

Se consideră

$$f(X, cY, \rho, n) = \left(1 + \frac{1/4 - n^2)}{\rho^2}\right)X \tag{11}$$

şi

$$\delta = \frac{1+q-c^2}{c^2}X, \tag{12}$$

în care c este o constantă arbitrară.

Această ecuaţie diferenţială neliniară se integrează aproximînd pe intervalul de integrare ales funcţia $\delta = \text{const.}$, ceea ce conduce la liniarizarea ecuaţiei. Cu cît pasul de integrare este mai mic, cu atît precizia creşte.

Sub această formă se poate aplica varianta numerică a metodei delta [1], denumită pe scurt în cele ce urmează, metoda delta.

Folosind relaţia (7), se revine la soluţia căutată R.

Condiţiile iniţiale specifice metodei delta sînt:

$$X_0 = R_n(\rho_0)/\sqrt{\rho_0} \tag{13}$$

$$Y_0 = \frac{1}{c}\left[\frac{R_n'(\rho_0)\sqrt{\rho_0} + R_n(\rho_0)}{2\sqrt{\rho_0}}\right] \tag{14}$$

în care indicele „0" se referă la punctul de origine.

3. MEMBRANA CIRCULARĂ FIXATĂ PE CONTUR

Utilizînd variabila adimensională ρ, se determină cu metoda delta valorile funcției $R_n(\rho_k)$ unde $\rho_k = \rho_{k-1} + \Delta\rho$, $k = 1,2,\ldots$ iar $\Delta\rho$ este pasul de integrare ales.

Integrarea se pornește din imediata vecinătate a punctului central unde s-au impus condițiile inițiale (13) și (14), mergînd spre periferie și urmărind razele corespunzătoare cercurilor nodale, unde $R_n(\rho^*) = 0$.

Integrarea se oprește pe un cerc nodal, care corespunde din punct de vedere al legăturilor cu conturul exterior al membranei. Pentru primul mod de vibrație, integrarea se oprește la primul cerc nodal ($s = 1$), iar pentru modurile superioare ($s = 2,3,\ldots$), la cercurile corespunzătoare.

Valoarea ρ^* pentru care $R_n(\rho^*)=0$, este determinată prin interpolare liniară între acele valori succesive pentru care $R_n(\rho_{k-1}) \cdot R(\rho_k) \leqslant 0$.

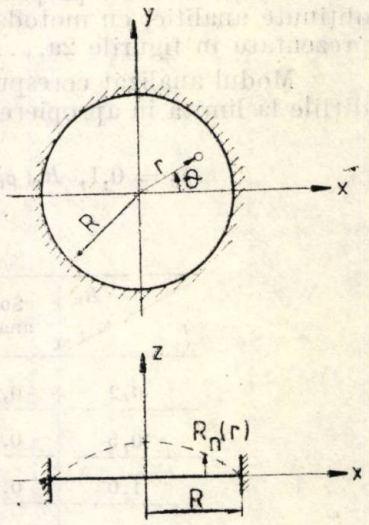


Fig. 1

Metoda utilizată necesită condiții la limită relative la valoarea funcției și derivata acesteia în punctul din care se pornește integrarea.

Pentru o rază R dată, din relația (6) se poate determina pulsația proprie a modului propriu considerat:

$$\omega = \frac{\rho^*}{R}\sqrt{\frac{N}{\mu}}. \tag{15}$$

Din relația (15) reiese că ρ^* poate fi considerat ca un coeficient adimensional folosit în calculul pulsațiilor proprii, pentru care se găsesc valori în literatura de specialitate.

În tabelul 1 se prezintă comparativ soluția ρ^* obținută cu metoda delta și soluția analitică prezentată în lucrarea [2], folosindu-se notațiile:

n = ordinul soluției = numărul de diametre nodale;

s = numărul de cercuri nodale.

Tabelul 1

s \ n	$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
	delta	analitic	delta	analitic	delta	analitic
1	2,414	2,405	3,833	3,832	5,135	5,136
2	5,529	5,520	7,017	7,016	8,416	8,417
3	8,663	8,654	10,175	10,173	11,619	11,619
4	11,801	11,792	13,325	13,323	14,795	14,796

Pentru $n = 0$, s-au impus condițiile la limită:
$\rho_0 = 0{,}005$, $R_0(\rho_0) = 1$, $R_0'(\rho_0) = 0$, cu un pas de integrare $\Delta\rho = 0{,}001$.

Se remarcă o foarte bună concordanță între cele două șiruri de valori, abaterea maximă fiind 0,4%.

Pentru formele proprii se prezintă în tabelul 2 valori comparative obținute analitic, cu metoda delta și cu metoda Runge-Kutta, care sînt prezentate în figurile 2a, ...,2d.

Modul analizat corespunde la $n = 0$, $s = 1$, în care s-au impus condițiile la limită în apropierea originii, preluate din [2]:

$$\rho_0 = 0{,}1, \quad R_0(\rho_0) = 0{,}9975, \quad R_0'(\rho_0) = -0{,}0499.$$

Tabelul 2

r \ R_n	Soluția analitică	Metoda delta	Metoda Runge-Kutta
0,2	0,9900	0,9917	0,9900
0,5	0,9385	0,9415	0,9384
1,0	0,7652	0,7695	0,7649
1,5	0,5118	0,5159	0,5114
2,0	0,2239	0,2269	0,2234
2,5	−0,0484	−0,0469	−0,0488
ρ^*	2,4048	2,4083	2,4039

Se remarcă o bună concordanță între valorile obținute cu metoda delta și valorile obținute analitic, însă precizia este puțin inferioară soluției găsite cu metoda Runge-Kutta pentru același pas de integrare, înscriindu-se totuși în limitele admise uzual. Timpul de calcul necesar metodei Runge-Kutta este de aproximativ patru ori mai mare decît cel necesar metodei delta.

Aceleași observații se pot face și în privința valorii ρ^* obținute, în plus valoarea obținută cu metoda delta este mai apropiată decît cea indicată în tabelul 1, datorită impunerii condițiilor la limită exacte.

4. MEMBRANA CIRCULARĂ FIXATĂ PE CONTUR ȘI ÎN CENTRU

Avînd în vedere că utilizarea metodei delta conduce la rezultate cu precizie bună, se studiază în continuare membrana circulară fixată pe contur și în punctul central (fig. 3). Acest caz de fixare a fost studiat folosind metodica de integrare prezentată anterior, condițiile la limită fiind:

$$\rho_0 = 0{,}01, \quad R_0(\rho_0) = 0{,}0.$$

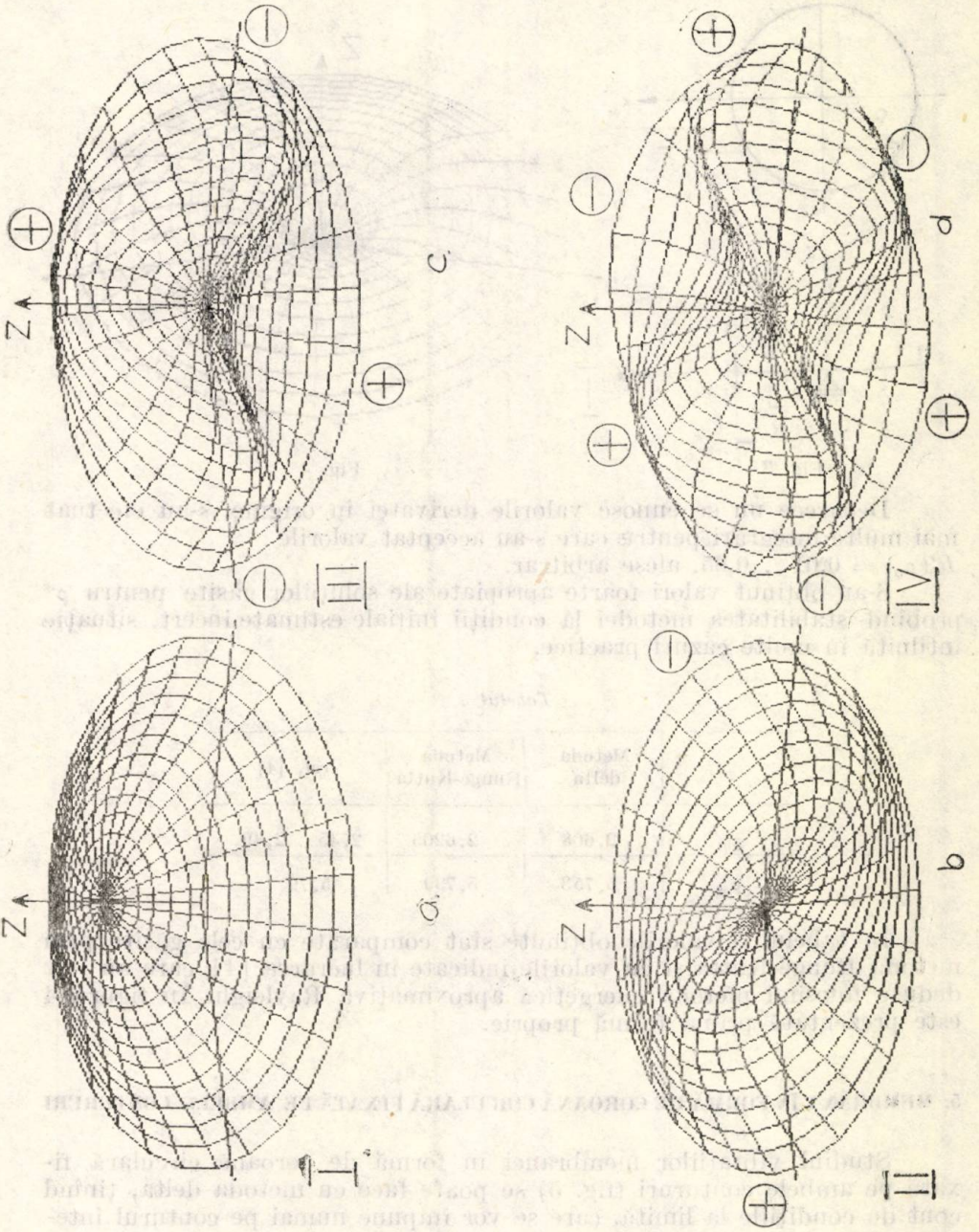


Fig. 2

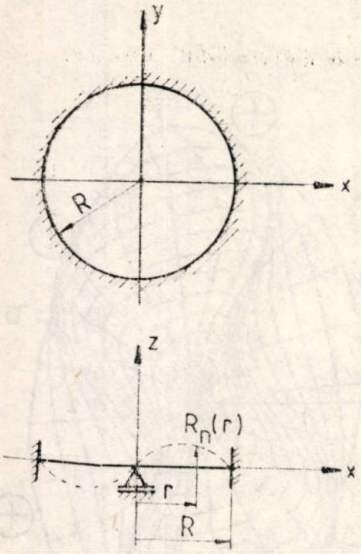


Fig. 3

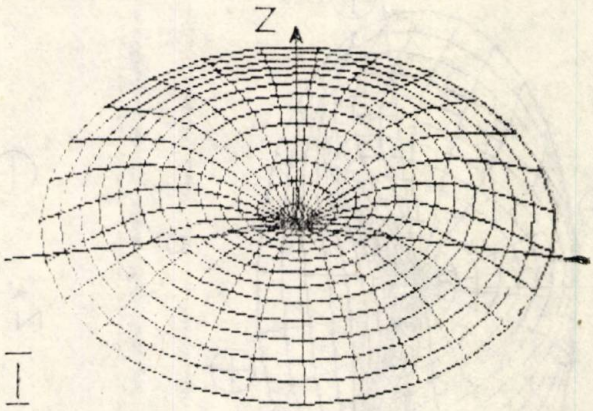


Fig. 4

Deoarece nu se cunosc valorile derivatei în origine, s-au efectuat mai multe integrări pentru care s-au acceptat valorile :
$R_0'(\rho_0) = 0{,}01 \ldots 0{,}05$, alese arbitrar.

S-au obţinut valori foarte apropiate ale soluţiilor găsite pentru ρ^* probînd stabilitatea metodei la condiţii iniţiale estimate incert, situaţie întîlnită în multe cazuri practice.

Tabelul 3

	Metoda delta	Metoda Runge-Kutta	ref. [4]
ρ_{01}	2,608	2,6205	2,45...2,49
ρ_{02}	5,753	5,739	5,79

În tabelul 3 valorile obţinute sînt comparate cu cele găsite prin metoda Runge-Kutta şi cu valorile indicate în lucrarea [4], care au fost deduse folosind metoda energetică aproximativă Rayleigh. În figura 4 este prezentată prima formă proprie.

5. MEMBRANA ÎN FORMĂ DE COROANĂ CIRCULARĂ FIXATĂ PE AMBELE CONTURURI

Studiul vibraţiilor membranei în formă de coroană circulară fixată pe ambele contururi (fig. 5) se poate face cu metoda delta, ţinînd cont de condiţiile la limită, care se vor impune numai pe conturul interior (R_i), ca de exemplu :

$$\rho_0 = 0{,}5,\ R_0(\rho_0) = 0{,}0,\ R_0'(\rho_0) = 0{,}01 \ldots 0{,}5,\ n = 0.$$

Și în acest caz valorile derivatei pe conturul interior nu sînt cunoscute și s-au luat ca mai înainte un set de valori alese arbitrar.

Valoarea $\rho^* = 3{,}519$ a fost obținută pentru oricare din valorile $R_0'(\rho_0)$ din intervalul indicat.

Conform relației (6) se deduce că modelul studiat corespunde unei membrane avînd raportul $R_e/R_i = \rho^*/\rho_0 = 7{,}038$.

Pentru raze cunoscute, pulsația proprie rezultă din relația (15) pentru $R=R_e$.

Calculul se face plecînd de la conturul interior R_i și se oprește, la fel ca în cazul precedent, găsindu-se o valoare ρ^* (prin interpolare liniară) din care rezultă un raport R_e/R_i. Pentru a se ajunge la raportul R_e/R_i impus din datele problemei, calculul se efectuează iterativ cu diferite valori inițiale ρ_0, pînă cînd rezultă o valoare a raportului R_e/R_i cu precizia dorită.

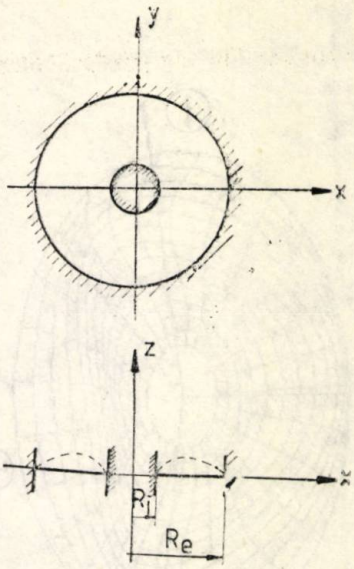


Fig. 5

În figurile 6a, ..., 6c sînt prezentate primele forme proprii.

6. CONCLUZII

Utilizarea variantei numerice a metodei delta, care este o metodă aproximativă, pentru integrarea ecuației diferențiale neliniare (8), dedusă pentru vibrațiile transversale ale membranelor circulare axial simetrice, a condus la valori de o precizie foarte bună pentru pulsațiile proprii, timpul de calcul fiind de aproximativ patru ori mai scurt decît în cazul utilizării metodei Runge-Kutta.

Au fost analizate atît cazuri de fixare cunoscute în literatura de specialitate, cît și cazuri mai puțin prezentate în alte lucrări. Acolo unde a fost posibil s-au efectuat comparații care au arătat o bună concordanță a rezultatelor.

Se poate remarca stabilitatea soluției numerice la modificarea valorii derivatei în punctul de pornire a calculului, care este o valoare în general necunoscută.

Primit în redacție la 29 aprilie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. E. DECIU, P. DIMO, *Metode aproximative numerice pentru studiul vibrațiilor neliniare cu un grad de libertate*, St. cerc. mec. apl. **34**, *1* (1975).
2. A. ANGOT, *Complemente de matematici*, Edit. tehnică, București, 1965.
3. G. P. TOLSTOV, *Serii Fourier*, Edit. tehnică, București, 1955.
4. H. V. CORTINEZ, P.A. A. LAURA, *A note on vibrating membranes and plates with internal support*, Journal of Sound and Vibrations, *104* (1986).

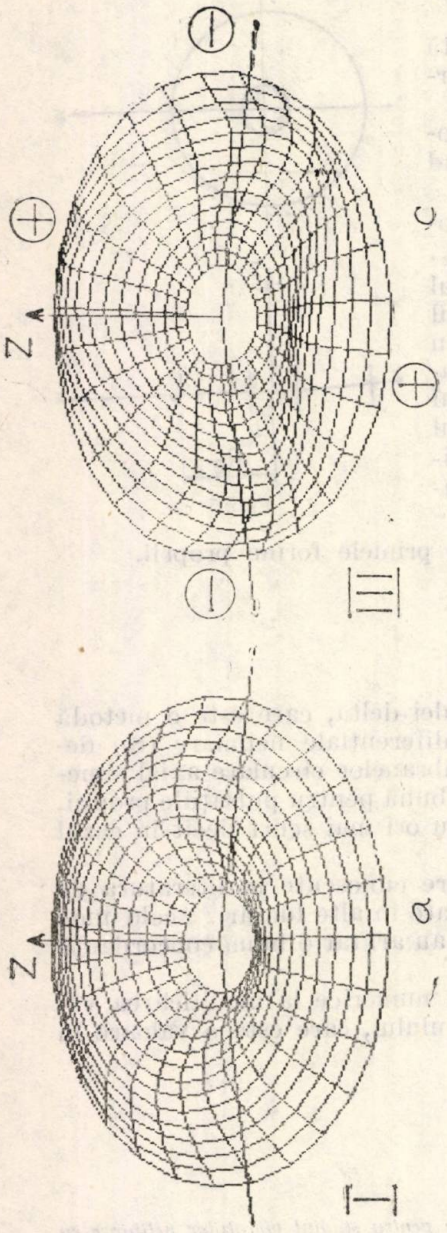


Fig. 6

OSCILAȚII PRODUSE DE SARCINI MOBILE ASUPRA GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC

de ȘT. TEODORESCU, V. TALLE și Ș. VASILESCU

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare este analizată influența forței tăietoare asupra vitezei critice de deplasare a unei sarcini mobile pe o grindă așezată pe fundație elastică. Pentru comportarea elastică a terenului este admisă ipoteza lui Winkler care în cazul conductelor și rezervoarelor cilindrice [6] nu mai reprezintă o aproximație ci comportarea reală a structurii. Rezultatele obținute sînt analizate pe un exemplu de calcul și se pot aplica pentru determinarea vitezei critice de deplasare a unui produs în aparate cilindrice verticale de tip coloană.

1. ASPECTE GENERALE

În industria petrolieră apar frecvent cazuri cînd asupra sistemelor elastice acționează forțe perturbatoare care își modifică în timp poziția punctului de aplicație (curgerea fluidului printr-o conductă, umplerea unui rezervor cilindric cu lichid etc.).

Deoarece comportarea acestui tip de aparatură poate fi asimilată cu comportarea grinzilor pe mediu elastic [6] apare necesar studiul unor aspecte în acest sens.

S-a arătat în [6] că influența forței tăietoare asupra deformării secțiunii transversale a grinzilor pe mediu elastic modifică principial deformata și eforturile în grindă. Este deci de așteptat ca lunecările să-și facă simțită prezența și în cazul oscilațiilor produse de sarcini mobile.

2. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A MIȘCĂRII GRINZII AȘEZATE PE FUNDAȚIE ELASTICĂ

Se consideră o grindă așezată pe teren elastic, asupra căreia acționează o perturbație exterioară $f(x,t)$ care se deplasează în lungul grinzii cu viteza v (fig. 2.1).

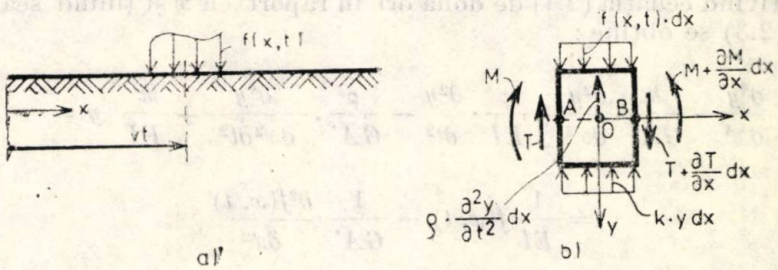


Fig. 2.1.

În urma acțiunilor exterioare, bara se deformează producînd în fundație o reacțiune uniform distribuită proporțională (în ipoteza lui Winkler) cu săgeata y din punctul respectiv:

$$\vec{q} = -k\vec{y} \tag{2.1}$$

În relația (2.1) k reprezintă constanta elastică a fundației $\frac{[F]}{[L^2]}$.

Izolînd un element de bară de lungime dx și scriind ecuația de proiecție pe axa y și momentul rezultant în B, se obțin următoarele relații:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = ky + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x,t) \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \qquad \text{(b)} \tag{2.2}$$

din care rezultă:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = ky + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x,t) \tag{2.3}$$

În ecuațiile de mai sus ρ reprezintă masa barei pe unitatea de lungime. Ecuația diferențială a liniei elastice a unei bare încovoiate cînd se ține seama de influența forței tăietoare este [4]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{1}{GA'}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.4}$$

unde: $M(x,t)$ este momentul încovoietor din secțiunea de abscisă x, E este modulul de elasticitate longitudinală al materialului barei, I momentul de inerție în raport cu axa Oz, G modulul de elasticitate transversal $T(x,t)$ forța tăietoare din secțiunea de abscisă x și A' o arie convențională a secțiunii transversale, pe care eforturile τ_{xy} se consideră a fi uniform distribuite. $\left(A' = \frac{5}{6}A \text{ pentru dreptunghi};\ A' = \frac{9}{10}A \text{ pentru cerc}\right)$.

Derivînd ecuația (2.4) de două ori în raport cu x și ținînd seama de (2.2) și (2.3) se obține:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{k}{GA'}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho}{EI}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho}{GA'}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{k}{EI}\ y =$$

$$= \frac{1}{EI}f(x,t) - \frac{1}{GA'}\cdot\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

Ecuația cu derivate parțiale (2.5) descrie mișcarea grinzii sub acțiunea unei sarcini mobile, cînd se ține seama și de influența forței tăietoare asupra deformării secțiunii transversale.

În continuare se va analiza cazul particular cînd pe grindă se deplasează o forță concentrată P cu viteza constantă v. În acest caz notînd :

$$x - vt = \xi \tag{2.6}$$

și ținînd seama că :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\xi} \tag{a}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{c} \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = v^2 \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{d}$$

unde h reprezintă o funcție de clasă C^2 de $x - vt$, ecuația cu derivate parțiale (2.5) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{\rho v^2}{EI} \cdot \frac{1 - \dfrac{kEI}{\rho v^2 GA'}}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{k}{EI} \frac{1}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} y =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} f(\xi) - \frac{1}{GA'} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{2.8}$$

Notînd cu :

$$4n^2 = \frac{\rho}{EI} \cdot \frac{1 - \dfrac{kEI}{\rho v^2 GA'}}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} \tag{a}$$

$$4m^4 = \frac{k}{EI} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\rho v^2}{GA'}} \tag{b} \qquad (2.9)$$

ecuația diferențială (2.8) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}\xi^4} + 4n^2 v^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + 4m^2 \cdot y = \frac{4m^4}{k} f(\xi) - \frac{4m^4 EI}{k\, GA'} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{2.10}$$

Pentru $v < \frac{m}{n}$, rădăcinile ecuației caracteristice

$$r^4 + 4n^2v^2r^2 + 4m^4 = 0 \tag{2.11}$$

sînt complexe și pot fi puse sub forma:

$$r_1 = \alpha + i\beta;\ r_2 = \alpha - i\beta;\ r_3 = -\alpha + i\beta;\ r_4 = -\alpha - i\beta \tag{2.12}$$

unde α și β sînt date de relațiile:

$$\alpha = \sqrt{m^2 - a^2n^2} \quad \text{(a)}$$
$$\beta = \sqrt{m^2 + a^2n^2} \quad \text{(b)} \tag{2.13}$$

Soluția generală a ecuației (2.10) se poate pune sub forma:

$$y(\xi) = e^{\alpha\xi} \cdot (c_1\cos\beta\xi + c_2\sin\beta\xi) + e^{-\alpha\xi}(c_3\cos\beta\xi + c_4\sin\beta\xi) + \Phi(\xi) \tag{2.14}$$

unde $\Phi(\xi)$ este soluția particulară a ecuației neomogene.

Cînd pe grindă se deplasează o forță concentrată P, situată la $x = vt$, atît pentru $\xi < 0$ cît și pentru $\xi > 0$ se poate considera $f(\xi) = 0$. Ținînd seama că pe măsură ce ne îndepărtăm față de punctul de aplicație al forței P, săgețile trebuie să scadă, putem neglija din soluția (2.14) termenii ce devin infiniți. Se obține astfel soluția (2.14) sub forma:

$$y(\xi) = \begin{cases} e^{\alpha\xi}(c_1\cos\beta\xi + c_2\sin\beta\xi), & \xi < 0 \\ e^{-\alpha\xi}(c_3\cos\beta\xi + c_4\sin\beta\xi), & \xi > 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Pentru $\xi = 0$, relațiile de legătură între săgeți, rotiri, momente și forțe tăietoare, conduc la condițiile:

$$y_{0-\varepsilon} = y_{0+\varepsilon};\ \left.\frac{dy}{d\xi}\right|_{0-\varepsilon} = \left.\frac{dy}{d\xi}\right|_{0+\varepsilon};\ \left.\frac{d^2y}{d\xi^2}\right|_{0-\varepsilon} = \left.\frac{d^2y}{d\xi^2}\right|_{0+\varepsilon}$$
$$\left.\frac{d^3y}{d\xi^3}\right|_{0-\varepsilon} = \left.\frac{d^3y}{d\xi^3}\right|_{0+\varepsilon} + \frac{P}{EI\left(1 - \frac{\rho v^2}{GA'}\right)} \tag{2.16}$$

Introducînd expresia (2.15) în condițiile de continuitate (2.16) se obțin constantele c_1, c_2, c_3, c_4 iar (2.15) capătă forma finală:

$$y(\xi) = \begin{cases} \frac{P}{8EI_1m^2\alpha}\, e^{\alpha\xi}\left(\cos\beta\xi - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\xi\right), & \xi \leqslant 0 \\ \frac{P}{8EI_1m^2\alpha}\, e^{-\alpha\xi}\left(\cos\beta\xi + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\xi\right), & \xi > 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

unde cu I_1 s-a notat $I\left(1 - \frac{\rho v^2}{GA'}\right)$ (2.18)

Din (2.17) se poate observa că săgeata pentru $\xi = 0$ devine :

$$y(0) = \frac{P}{8EI'm^2\alpha} \tag{2.19}$$

În relația (2.18) se poate observa că săgeata în dreptul forței concentrate $y(0)$ devine infinită atunci cînd numitorul ei se anulează :

$$I_1 m^2 \alpha = 0 \tag{2.20}$$

Înlocuind în (2.20) relațiile (2.18), (2.9) și (2.13) se obține ecuația algebrică :

$$v^4 + 2\frac{k}{\rho}\frac{EI}{GA'}v^2 + \left(\frac{k}{\rho}\right)^2\left(\frac{EI}{GA'}\right)^2 - \frac{4EIk}{\rho^2} = 0 \tag{2.21}$$

din care se determină viteza critică de deplasare a sarcinii mobile (v_{cr}) :

$$v_{cr}^2 = \sqrt{\frac{4EIk}{\rho^2}} - \frac{k}{\rho}\cdot\frac{EI}{GA'} \tag{a}$$

sau (2.22)

$$v_{cr} = \sqrt{\sqrt{\frac{4EIk}{\rho^2}} - \frac{k}{\rho}\frac{EI}{GA'}} \tag{b}$$

Dacă se neglijează efectul forței tăietoare se poate observa că viteza critică de deplasare a sarcinii mobile v_{cr} se poate obține din (2.22 b) neglijînd termenul ce conține influența lunecărilor :

$$v_{cr\,o} = \sqrt[4]{\frac{4EIk}{\rho^2}} \tag{2.23}$$

care este identic cu cel obținut în [3].

De asemenea, analizînd relațiile (2.22) și (2.23) se obține legătura între vitezele critice de deplasare a sarcinii mobile cînd se ține seama de forța tăietoare (v_{cr}) și cînd nu se ține seama ($v_{cr\,o}$).

$$v_{cr}^2 = v_{cr\,o}^2 - \frac{k}{\rho}\frac{EI}{GA'} \tag{2.24}$$

sau

$$v_{cr} = v_{cr\,o}\sqrt{1 - \sqrt{\frac{kEI}{4G^2A'^2}}} \tag{2.25}$$

Analizînd relațiile (2.24) și (2.25) se observă că prezența forței tăietoare în deformarea secțiunii transversale micșorează viteza critică de deplasare a sarcinii mobile în lungul grinzii, deci nu este recomandat să se neglijeze acest aspect.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă din lemn așezată pe un mediu elastic (fig.3.1) avînd secțiunea transversală un dreptunghi 24×16. Constanta elastică a fundației este $k_f = 8$ daN/cm^3. Se cere să se calculeze cu cît este mai mică viteza critică de deplasare a sarcinii mobile P în cazul cînd se ține seama de influența forței tăietoare față de cazul cînd această influență se neglijează.

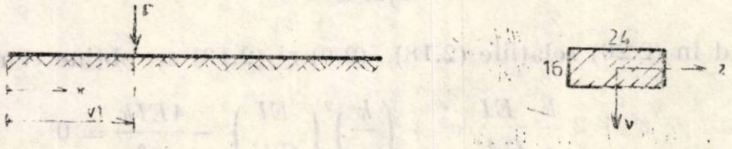


Fig. 3.1.

Din relația (2.25) se observă că:

$$\frac{v_{cr}}{v_{cr\,0}} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{kEI}{4G^2A'^2}}} \tag{3.1}$$

Pentru grinda considerată avem:

$$I_z = \frac{1 \cdot 16^3}{12} = 342 \text{ cm}^4;\ k = 1 \cdot 8 = 8 \text{ daN/cm}^2;\ E = 10^5 \text{ daN/cm}^2;\ G =$$

$$= 5 \cdot 10^3 \text{ daN/cm}^2;\ A' = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 16 = 13{,}333 \text{ cm}^2.$$

Înlocuind datele numerice de mai sus în relația (3.1) rezultă:

$$\frac{v_{cr}}{v_{cr\,0}} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8 \cdot 10^5 \cdot 342}{4 \cdot (5 \cdot 10^3)^2 (13{,}333)^2}}} = 0{,}93$$

adică o viteză critică cu aproximativ 7% mai mică decît cea clasică.

4. CONCLUZII

Ca sisteme elastice cu largă utilizare, grinzile pe mediu elastic necesită în multe cazuri un calcul exact, care să țină seama și de influența lunecărilor în deformarea secțiunii transversale.

În acest context în lucrare se analizează comparativ viteza critică de deplasare a unei sarcini concentrate asupra unei grinzi pe mediu elas-

tic. Față de cazul clasic (cînd se neglijează efectul forței tăietoare) se constată diferențe, care în funcție de forma secțiunii transversale pot fi considerabile.

De asemenea, extinderea procedeului pentru sarcini triunghiular distribuite și cupluri concentrate care își modifică punctul de aplicație în timp, este ușor de realizat și ar putea constitui obiectivul unei lucrări viitoare.

Primit în redacție la 12 februarie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. L. FRÝBA, *Vibrations of solids and structures under moving loads*, Academia Prague, Prague, 1972.
2. W. KÉCS, P. P. TEODORESCU, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei, București, 1970.
3. S. D. PONOMARIOV, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, Edit. tehnică, București, 1960.
4. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
5. N. POSEA, V. FLORIAN, V. TALLE, E. TOCACZ, *Mecanică aplicată pentru ingineri*, Edit. tehnică, București, 1984.
6. N. POSEA, Ș. VASILESCU, *Completions and new uses of the solutions of the equation of beams on elastic foundation*, Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **29**, 5 (1984).
7. Ș. VASILESCU, *Influența forței tăietoare asupra deformatelor statice ale barelor drepte*, St. cerc. mec. apl., **41**, 4 (1982).

CALIBRAREA PARAMETRILOR HIDRAULICI PRIN PROGRAMARE LINIARĂ

de I. SETEANU, M. ERHAN și VICTORIA RĂDULESCU

Institutul Politehnic, București

Se prezintă un algoritm de calibrare a rugozității medii pentru curgerea cu suprafața liberă, folosind măsurători „in situ" ale nivelelor. Se utilizează metoda simplex de programare liniară cu funcția obiectiv definită ca valoarea absolută a abaterii maxime între nivelele de calcul și cele măsurate. S-a testat procedeul propus pentru sectorul lacului de acumulare Turnu, riul Olt. Se fac recomandări privind selectarea punctelor de măsură și alegerea condițiilor inițiale de efectuare a măsurătorilor de teren.

1. INTRODUCERE

Problema identificării parametrilor ecuațiilor de curgere cu suprafață liberă în albii naturale sau canale deschise, prin folosirea observațiilor de teren (citiri de mină sau măsurarea vitezelor medii) într-un set de secțiuni de mină, implica obținerea unor soluții numerice ale acestor ecuații, în diferite situații inițiale și pentru valori estimate ale parametrilor, în vederea comparării lor cu măsurătorile „in situ".

Deși ecuațiile dinamice ale curgerii cu suprafața liberă în albii deschise (sistemul Saint-Venant)sînt binecunoscute, utilizarea lor în vederea predicției undelor de viitură și studiul regularizării stocului este limitată din următoarele cauze :

1. prezintă termeni neliniari în ecuațiile dinamice care constituie un sistem hiperbolic neliniar de ecuații cu derivate parțiale ;

2. dificultățile inerente de măsurare a parametrilor specifici ai curgerii, în special parametrii legați de panta de frecare. Acești parametri nu sînt direct măsurabili întrucît au un caracter global și urmează să fie identificați folosind ecuațiile de bază împreună cu observațiile directe, comparate cu rezultatele numerice concrete.

De regulă, soluția ecuațiilor neliniare cu derivate parțiale ale curgerii nepermanente în canale deschise se obțin pe cale numerică, iar calculele aferente sînt îngreunate de dificultățile legate de modul de discretizare a ecuațiilor folosite (instabilitate numerică atunci cînd se preferă formule explicite, respectiv sisteme mari de ecuații algebrice neliniare în cazul schemelor implicite).

În procesul de evaluare a parametrilor globali se introduce un procedeu iterativ implicit (algoritmul coeficienților de influență) care ușurează sensibil identificarea acestor parametri pentru zone de canal cu proprietăți uniforme. În acest fel, un canal natural se poate împărți într-un număr rezonabil de sectoare, fiecare din acestea avînd proprietăți uniforme în limitele unei erori acceptabile.

Metoda estimării celor mai mici pătrate adoptă în mod tacit ipoteza că erorile de observație sînt gaussiene. În cazul în care erorile sînt

de mărimi sensibil egale, este de preferat un criteriu de minimax pentru a obţine o estimare mai apropiată de valorile medii. Criteriul de minimizare a maximului valorilor absolute ale erorilor se poate, pe de altă parte, traduce într-o formulare de programare liniară. Întrucît observaţiile directe sînt de obicei corupte de „zgomote", pot rezulta diferite identificări pentru diverse tipuri de constrîngeri impuse parametrilor estimaţi.

2. ALGORITMUL SIMPLEX DE EVALUARE A PARAMETRILOR HIDRAULICI

Ecuaţiile dinamice Saint-Venant au forma :

$$v \cdot B \frac{\partial y}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = q(x, t)$$

$$g \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = g(i - s) \qquad (1)$$

unde $y(x, t)$ este adîncimea apei în canal; x desemnează deplasarea în lungul liniei de talveg în sensul curgerii; $A(y)$ reprezintă aria vie a secţiunii transversale; $v(x, t)$ este viteza de curgere; $B(y)$ este lăţimea la suprafaţa liberă ($= \partial A/\partial y$); i este panta canalului, iar s este panta de frecare; $q(x, t)$ desemnează debitul lateral specific pe unitatea de lungime a canalului (fig. 1).

Pentru evaluarea pantei de frecare se acceptă relaţia empirică :

$$s = v \cdot |v| \cdot r/R^n \qquad (2)$$

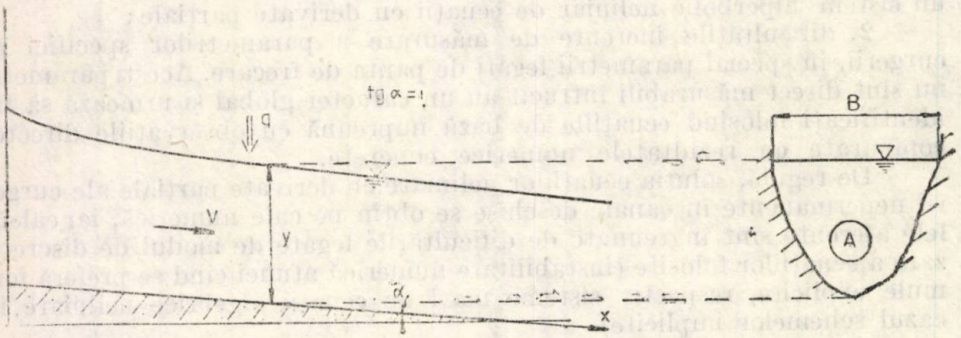


Fig. 1

unde r şi n sînt parametri de rezistenţă hidraulică cu valori pozitive, iar $R(y)$ este raza hidraulică ($= A(y)/P(y)$), $P(y)$ fiind perimetrul udat. Pentru $n = 2/3$ se regăseşte formula lui Manning, respectiv formula lui Chézy pentru $n = 1$.

Ca urmare a unui proces de identificare şi calibrare, folosind ecuaţiile dinamice şi măsurătorile directe ale variabilelor de curgere, cu condiţii la limită şi iniţiale bine precizate, se pot determina parametrii hidraulici r şi n. Alegerea adecvată a acestor coeficienţi presupune compa-

rarea rezultatelor numerice cu observațiile directe în timpul tranzitării unei unde de viitură de amplitudine medie.

Se consideră cazul unui sector de calcul cu secțiune trapezoidală, în care starea staționară de curgere este stabilită anterior apariției hidrografului analizat. În regimul staționar gradual-variat sistemul (1) devine :

$$\begin{aligned} v \cdot B \frac{\partial y}{\partial x} + A \frac{\partial y}{\partial x} &= q(x) \\ g \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= g(i - s) \end{aligned} \tag{3}$$

Eliminînd derivata $\partial v/\partial x$ se deduce relația :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(i - s - \frac{v \cdot q}{g \cdot A}\right) \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{4}$$

unde $c = \sqrt{g \cdot A/B}$ este celeritatea curgerii. În absența debitului lateral ($q = 0$) debitul Q nu depinde de x. Întrucît $Q = v \cdot A$, rezultă :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (i - s) \Big/ \left(1 - \frac{Q^2}{A^2 \cdot c^2}\right) \tag{5}$$

Ecuația diferențială (5) se programează cu ușurință, întrucît există o singură variabilă dependentă y și o constantă necunoscută Q. Relația este testată pentru fiecare tronson Δx, pornind de la un capăt, pentru o estimare aleasă a debitului Q, pînă ce se atinge celălalt capăt. Dacă este satisfăcută condiția la limită impusă, estimarea debitului Q este acceptabilă ; în caz contrar se reia procesul de calcul pentru o altă valoare a lui Q care se poate interpola evaluînd diferența între condițiile la limită date și cele calculate. Alternativ, mișcarea inițială staționară se poate determina și experimental dintr-un număr suficient de mare de măsurători de cotă și viteză în lungul canalului.

O formulare explicită în diferențe a algoritmului de mai sus conduce la relația :

$$y(k+1) = y(k) + \frac{\Delta x \cdot (i - s(k))}{1 - \left(\dfrac{Q}{A(k) \cdot c(k)}\right)^2} \tag{6}$$

unde k denotă o secțiune în lungul canalului. Aceasta formula se dovedește uneori instabilă în evaluarea numerică și trebuie corelată cu sensul de calcul (spre amonte, în regim subcritic).

Pentru determinarea parametrilor r și n pentru cele m sectoare ale unui canal, se poate utiliza algoritmul coeficienților de influență în mod secvențial, evaluînd succesiv parametrii fiecărui sector către amonte.

Se admite ipoteza că nu există o influență apreciabilă între măsurătorile din amonte și parametrii obținuți în aval. Datele de identificare includ debitul, respectiv cota în punctele de observație [1].

Etapa 1. Estimările inițiale ale parametrilor $r_i^{(0)}$, $n_i^{(0)}$ $(i = 1,2 \ldots m)$ sînt utilizate pentru a rezolva ecuația în diferențe finite, folosind valorile vitezelor și cotelor în secțiunile de măsură.

Etapa 2. Se compară valorile calculate ale vitezelor și cotelor cu cele măsurate (marcate cu *), obținînd erorile :

$$\varepsilon_j^{(0)} = v_j^{(0)} - v_j^* \tag{7}$$

$$\eta_j^{(0)} = y_j^{(0)} - y_j^* \tag{8}$$

Dacă toate erorile mai semnificative se datorează măsurărilor, nu procesului de calcul este de dorit să se minimizeze funcția obiectiv :

$$F = \sum_{j=1} [(\varepsilon_j)^2 + (\eta_j)^2] \tag{9}$$

Etapa 3. Se dau variații independente parametrilor $r^{(0)}$ și $n^{(0)}$, constatîndu-se efectul acestora asupra erorilor ε_j și η_j, examinînd soluțiile ecuațiilor în diferențe finite pentru valorile perturbate ale parametrilor. Rapoartele dintre variațiile erorilor și creșterile corespunzătoare ale parametrilor sînt expresii aproximative ale componentelor gradienților erorilor, denumite coeficienți de influență.

Etapa 4. Se notează :

$$r^{(1)} = r^{(0)} + \alpha^{(0)} \tag{10}$$

$$n^{(1)} = n^{(0)} + \beta^{(0)} \tag{11}$$

unde corecțiile $\alpha^{(0)}$ și $\beta^{(0)}$ urmează a fi determinate. Utilizînd formula creșterilor finite se obține :

$$\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j^{(0)} + a_{1j}^{(0)} \alpha^{(0)} + a_{2j}^{(0)} \beta^{(0)} \tag{12}$$

$$\eta_j^{(1)} = \eta_j^{(0)} + b_{1j}^{(0)} \alpha^{(0)} + b_{2j}^{(0)} \beta^{(0)} \tag{13}$$

unde $a_{1j}^{(0)}$, $b_{1j}^{(0)}$, $a_{2j}^{(0)}$, $b_{2j}^{(0)}$ constituie componentele matricii coeficienților de influență.

Etapa 5. Prin minimizarea gradientului funcției obiectiv, exprimat prin formula pătratică (9), se obțin corecțiile :

$$\alpha^{(0)} = \frac{L \cdot 0 - M \cdot N}{K \cdot M - L^2} \tag{14}$$

$$\beta^{(0)} = \frac{L \cdot N - K \cdot 0}{K \cdot M - L^2} \tag{15}$$

unde :

$$K = \sum_j (a_{1j})^2 + \sum_j (b_{1j})^2 \tag{16}$$

$$L = \sum_j a_{1j} a_{2j} + \sum_j b_{1j} b_{2j} \tag{17}$$

$$M = \sum_j (a_{2j})^2 + \sum_j (b_{2j})^2 \tag{18}$$

$$N = \sum_j a_{ij} \varepsilon_j^{(0)} + \sum_j b_{1j} \eta_j^{(0)} \tag{19}$$

$$Q = \sum_j a_{2j} \varepsilon_j^{(0)} + \sum_j b_{2j} \eta_j^{(0)} \tag{20}$$

În acest fel se pot estima coeficienții $r^{(1)}$ și $n^{(1)}$.

Etapa 6. Se evaluează soluția ecuației de curgere staționară pentru parametrii $r^{(1)}$ și $n^{(1)}$, estimîndu-se din nou erorile ε_j și η_j.

Etapa 7. Se repetă etapele (3) — (6) pînă ce se atinge minimul funcției obiectiv.

Algoritmul prezentat permite alegerea celor mai probabili coeficienți de rugozitate, compatibili cu schema de curgere staționară și cu rezultatele măsurătorilor de teren.

În loc de a utiliza metoda gradientului pentru minimizarea funcției obiectiv este mai comod și mai eficient să se aplice metoda programării liniare simplex, modificînd în oarecare măsură definiția funcției obiectiv.

Etapa a. Estimările inițiale ale parametrilor $r^{(0)}$, $n^{(0)}$ sînt utilizate în rezolvarea ecuațiilor dinamice, determinînd cotele y_j și vitezele v_j în secțiunile de mîră (fig. 2).

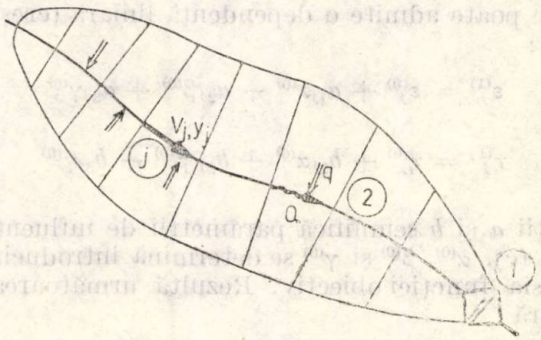


Fig. 2

Comparîndu-se rezultatele cu măsurătorile directe, se evaluează erorile :

$$\varepsilon_j = v_j - v_j^* \tag{21}$$

$$\eta_j = y_j - y_j^* \tag{22}$$

Etapa b. Se definește o funcție obiectiv a problemei minimax de programare liniară de forma :

$$\min \max_j (|\varepsilon_j| + |\eta_j|) \tag{23}$$

unde, pentru simplificare, funcțiile de pondere s-au ales egale cu unitatea.

Etapa c. Se introduc ponderile independente ale parametrilor, concentrate într-o matrice a coeficienților de forma : în care elementele matriciale reprezintă, ca și mai sus, rapoartele între variațiile erorilor și

variațiile parametrilor. Aceste rapoarte aproximează componentele gradienților erorilor [2].

	ε_1	ε_2	ε_3	...	ε_T	η_1	η_2	η_3	...	η_T
r	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1T}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	...	b_{1T}
n	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2T}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	...	b_{2T}
q	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3T}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	...	b_{3T}

Etapa d. Schimbările în estimarea valorilor parametrilor pentru iterația următoare se introduc prin relațiile :

$$r^{(1)} = r^{(0)} + \alpha^{(0)} \tag{24}$$

$$n^{(1)} = n^{(0)} + \beta^{(0)} \tag{25}$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} + \gamma^{(0)} \tag{26}$$

unde $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ și $\gamma^{(0)}$ urmează să fie determinați, iar indicele 1 reprezintă noile estimări. Se poate admite o dependență liniară (creșteri finite) pentru observația j :

$$\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j^{(0)} + a_{1j}\alpha^{(0)} + a_{2j}\beta^{(0)} + a_{3j}\gamma^{(0)} \tag{27}$$

și

$$\eta_j^{(1)} = \eta_j^{(0)} + b_{1j}\alpha^{(0)} + b_{2j}\beta^{(0)} + b_{3j}\gamma^{(0)} \tag{28}$$

în care coeficienții a și b semnifică parametrii de influență aleși în mod adecvat în etapa (c). $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ și $\gamma^{(0)}$ se determină introducînd relațiile (27) și (28) în expresia funcției obiectiv. Rezultă următoarea formulare de programare liniară :

$$\min(\varepsilon + \eta) \tag{29}$$

cu restricțiile :

$$\pm(\varepsilon_j^{(0)} + a_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} + a_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} + a_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)}) \leqslant \varepsilon_j \tag{30}$$

$$\pm(\eta_j^{(0)} + b_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} + b_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} + b_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)}) \leqslant \eta_j \tag{31}$$

$$\varepsilon_j \leqslant \varepsilon \tag{32}$$

$$\eta_j \leqslant \eta \tag{33}$$

$$\varepsilon_j, \eta_j, \varepsilon, \eta, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \gamma^{(0)} \geqslant 0 (j = 1,2, \ldots, m) \tag{34}$$

Transcrierea problemei de programare liniară în format standard este :

$$\min(\varepsilon + \eta) \tag{35}$$

cu condițiile :

$$-\varepsilon_j + a_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} + a_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} + a_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)} + \Pi_{1j} = -\varepsilon_j^{(0)}$$

$$-\varepsilon_j - a_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} - a_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} - a_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)} + \Pi_{2j} = \varepsilon_j^{(0)}$$

$$\varepsilon_j - \varepsilon + \Pi_{3j} = 0$$

$$-\eta_j + b_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} + b_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} + b_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)} + \Pi_{4j} = -\eta_j^{(0)}$$

$$-\eta_j - b_{1j}^{(0)}\alpha^{(0)} - b_{2j}^{(0)}\beta^{(0)} - b_{3j}^{(0)}\gamma^{(0)} + \Pi_{5j} = \eta_j^{(0)}$$

$$\eta_j - \eta_i + \Pi_{6j} = 0$$

$$\varepsilon_j,\ \eta_j,\ \varepsilon,\ \eta_i,\ \alpha^{(0)},\ \beta^{(0)},\ \gamma^{(0)},\ \Pi_{1j},\ \Pi_{2j},\ \Pi_{3j},\ \Pi_{4j},$$

$$\Pi_{5j},\ \Pi_{6j} \geqslant 0,\ j = 1,2,\ldots,T$$

unde Π sînt variabilele ecart adăugate pentru a transforma constrîngerile de tip inegalitate în constrîngeri de tip egalitate.

În acest fel, problema de programare liniară are cel puțin 6 m constrîngeri și $8m+5$ variabile. Variabilele sînt : ε_j, $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$, ε, η_j, η_i, Π_{1j}, Π_{2j}, Π_{3j}, Π_{4j}, Π_{5j} și Π_{6j}.

Entitățile $\varepsilon_j^{(0)}$, $a_{1j}^{(0)}$, $a_{2j}^{(0)}$, $a_{3j}^{(0)}$, $\eta_j^{(0)}$, $b_{1j}^{(0)}$, $b_{2j}^{(0)}$, $b_{3j}^{(0)}$ se determină prin calcul, iar soluțiile problemei de programare liniară includ pe $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ și $\gamma^{(0)}$. Astfel $r^{(1)}$, $n^{(1)}$ și $q^{(1)}$ se pot determina cu algoritmul minimax simplex trecîndu-se la iterația următoare, pînă ce un criteriu de convergență satisfăcător indică atingerea optimului.

Pentru calculul rugozităților hidraulice medii în secțiunile unui sector de rîu în regim natural sau amenajat, s-a întocmit un program de calcul în limbaj FORTRAN 77. Acest program are următoarea structură :

— introducerea datelor (parametrii geomorfologici, cotele măsurate în secțiunile de miră etc.);

— blocul de evaluare a matricii coeficienților de influență, avînd ca dimensiuni numărul secțiunilor transversale curente, respectiv numărul secțiunilor de miră;

— etapa de optimizare prin programare liniară și de determinare a rugozităților de calcul.

Elementele matricii coeficienților de influență sînt derivatele discretizate ale cotei suprafeței libere în secțiunile de miră în raport cu valorile rugozităților într-un profil transversal de referință ce parcurge succesiv toate secțiunile fizice ale sectorului analizat.

Vectorul simplex conține coeficienții sistemului liniar format din definiția funcției obiectiv și ecuațiile de condiție, obținute prin introducerea variabilelor ecart ce servesc la transformarea constrîngerilor de tip

inegalitate în egalități. Dimensiunea K a vectorului simplex se obține cu relația :

$$K = (M_s + 2)(N_s + 1) \tag{36}$$

$$N_s = M_1 + M_2 + M_3 \tag{37}$$

unde M_1 este numărul inegalităților de tip $\geqslant$, M_2 este numărul inegalităților de tip $\leqslant$, M_3 este numărul egalităților, iar N_s este numărul variabilelor independente de care depinde funcția obiectiv și restricțiile.

Funcția obiectiv exprimă eroarea maximă între cotele măsurate și cele calculate, minimizarea acestei funcții avînd ca rezultat obținerea rugozităților în fiecare etapă de calcul. Datorită neliniarității ecuației de mișcare gradual-variate, rezultatul se obține dintr-un proces iterativ, calculul considerîndu-se încheiat atunci cînd funcția obiectiv devine mai mică decît o mărime impusă.

Metoda de calcul pentru determinarea rugozităților a fost aplicată la situația tranzitării unui debit $Q = 450$ m^3/s prin lacul de acumulare Turnu de pe rîul Olt, în ipoteza mișcării permanente.

Analiza rezultatelor evidențiază o dependență mai pronunțată a procedeului de calibrare de rezultatele măsurătorilor din ultimele profile (coada lacului), considerate mult mai semnificative față de cele din apropierea barajului. Se recomandă, prin urmare, montarea unor mire de măsură în zona cozii lacului, unde variațiile curbei suprafeței libere de remuu sînt mai pronunțate, antrenînd micșorarea efectului erorilor de măsură asupra procedeului de calibrare.

3. CONCLUZII

Sînt prezentate două modalități de evaluare a rugozităților medii pentru un sector de curgere, caracterizat printr-un număr semnificativ de profile transversale cunoscute, folosind rezultatele măsurătorilor cotelor de remuu într-un număr relativ mic de stații de măsură, în condițiile curgerii cvasistaționare corespunzătoare unui debit cunoscut.

Alegînd adecvat funcția obiectiv și constrîngerile impuse parametrilor variabili se poate aplica fie metoda gradientului, pentru care funcția obiectiv reprezintă eroarea medie pătratică globală dintre cotele măsurate și cele evaluate numeric, fie metoda programării liniare simplex, pentru care funcția obiectiv reprezintă valoarea absolută a abaterii maxime între cotele măsurate și calculate.

S-a testat procedeul propus în cazul sectorului lacului de acumulare Turnu, rîul Olt, folosind 27 profile transversale pentru 9 secțiuni de mîră, la debitul $Q = 450$ m^3/s. Selectarea punctelor de măsură precum și alegerea cotei aval (la baraj) s-a efectuat ținînd seama de următoarele considerente [3] :

a. la baraj, unde vitezele sînt relativ mari în secțiunea evacuatorilor, este necesar să se țină seama de termenul cinetic în corecția cotei suprafeței libere, fie să se plaseze mira la o distanță suficientă de baraj

pentru a putea neglija acest termen, fie evaluînd concret viteza și corecția cinetică corespunzătoare;

b. în general, secțiunile de mină trebuie să fie suficient de depărtate de zonele cu variații mari de viteza, de exemplu zonele de îngustare bruscă, unde termenul cinetic poate introduce abateri apreciabile;

c. variațiile debitului în perioada de măsurare pot produce modificări ale cotelor măsurate ca și viteza și direcția vîntului;

d. colmatările și eroziunile produse între perioada elaborării profilelor de calcul și cea a efectuării măsurătorilor pot introduce abateri ale curbei reale de remuu față de cea obținută prin calcul.

Pentru a putea opta în alegerea secțiunilor de măsură trebuie să se analizeze în prealabil profilul longitudinal al curbei de remuu corespunzătoare cotelor măsurate, eliminîndu-se sau corectîndu-se rezultatele măsurătorilor acolo unde suprafața liberă obținută manifestă fluctuații nejustificate geomorfologic.

Curba de remuu, datorită caracterului disipativ al pierderilor de sarcină, trebuie să fie, în regim fluvial, descrescătoare în sensul curgerii, iar panta hidraulică să aibă valori mai mari în zonele de viteză mai mare. Se vor prefera măsurătorile din secțiunile situate în bieful amonte (coada lacului), întrucît influența cotelor măsurate asupra rugozităților de calcul se extinde în acest caz pe întreg sectorul analizat. Este de dorit ca măsurătorile de referință să corespundă unor debite relativ mari, întrucît în acest caz variația curbei de remuu este mai pronunțată, iar erorile sistematice sau întîmplătoare au o pondere mai redusă.

Primit în redacție la 12 februarie, 1991

BIBLIOGRAFIE

1. W. W.-G. YEH, L. BECKER, *Linear Programming and Channel Flow Identification* Journ. of Hydr. Div., **11** (1973).
2. W. W.-G. YEH, G. W. TAUXE, *Optimal Identification of Aquifer Diffusivity Using Quasi-linearization* Water Resources Research, **7**, 4 (1971).
3. I. SETEANU, M. ERHAN, V. RĂDULESCU, *Evaluarea rugozităților hidraulice și sistematizarea măsurătorilor de teren privind ridicarea curbelor de remuu pentru amenajările hidroenergetice de pe rîul Olt*, Contract de cercetare, I. Polit. Buc., 6—8—17/1989

MODELAREA MATEMATICĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC AL MECANISMULUI DE FORMARE A ROSTULUI DE LA MAȘINA DE ȚESUT A—100

de CORINA FETECĂU și FLORINA-LILIANA BUZESCU

Institutul Politehnic „Gh. Asachi", Iași

În această lucrare, adoptîndu-se o serie de ipoteze simplificatoare de lucru și folosind formalismul lagrangean, se efectuează studiul dinamic al mecanismului de formare a rostului de la mașina de țesut A—100, în vederea stabilirii ecuației diferențiale care descrie funcționarea mecanismului.

1. DESCRIEREA MECANISMULUI

Schița dinamică a mecanismului de formare a rostului este prezentată în figura 1, care evidențiază următoarele elemente ale mecanismului cu pozițiile raportate la reperul *Oxyz*.

— *arborele secundar* (*A.S*) al mașinii de țesut, solidar cu camele (Cm_f) și (Cm_s) care comandă mișcările pedalelor (Pd_f) și (Pd_s) ale mecanismului. Acest element execută o rotație în jurul unei axe fixe cu unghiul de rotație, θ_s, depinzînd de unghiul de rotație, θ_p, al arborelui principal, după ecuația :

$$\theta_s - \theta_s^0 = -\frac{1}{2}(\theta_p - \theta_p^0); \quad (1.1)$$

— *pedala iței din față* (Pd_f), executînd o mișcare de rotație oscilatorie în jurul centrului de oscilație Q cu parametrul de poziție $\varphi_{pd} = \varphi_{pd}(\theta_s)$. Această funcție se poate dezvolta într-o serie Fourier, aproximabilă cu un polinom trigonometric de ordinul cinci, adică de forma [1] :

$$\varphi_{pd} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\lambda=1}^{5} [a_\lambda \cos(\lambda\theta_s) + b_\lambda \sin(\lambda\theta_s)], \quad (1.2)$$

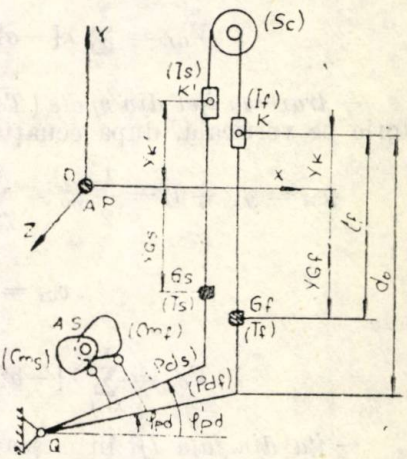


Fig. 1

cu :

$$\omega_{pd} = \dot{\varphi}_{pd} = \Omega_{pd}(\theta_s)\omega_s, \quad (1.3)$$

unde :

$$\Omega_{pd}(\theta_s) = \sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[-a_\lambda \sin(\lambda\theta_s) + b_\lambda \cos(\lambda\theta_s)]; \quad (1.4)$$

— *pedala iței din spate* (Pd_s), care execută tot o mișcare de rotație oscilatorie în jurul centrului de oscilație Q cu parametrul de poziție $\varphi'_{pd} = \varphi'_{pd}(\theta_s)$, deci și această funcție se va putea scrie sub forma unui polinom trigonometric, [1], adică :

$$\varphi'_{pd} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\lambda=1}^{5} [a'_\lambda \cos(\lambda\theta_s) + b'_\lambda \sin(\lambda\theta_s)], \tag{1.5}$$

cu :

$$\omega'_{pd} = \dot{\varphi}'_{pd} = \Omega'_{pd}(\theta_s)\omega_s, \tag{1.6}$$

unde :

$$\Omega'_{pd}(\theta_s) = \sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[-a'_\lambda \sin(\lambda\theta_s) + b'_\lambda \cos(\lambda\theta_s)]; \tag{1.7}$$

— *traversa iței din față* (Tf), în mișcare de translație rectilinie oscilatorie pe verticală, după legea [1] :

$$y_{Gf} = y_k(\theta_s) - l_f = \frac{1}{2} a_0^k + \sum_{\lambda=1}^{5} [a_\lambda^k \cos(\lambda\theta_s) + h_\lambda^k \sin(\lambda\theta_s)] - l_f, \tag{1.8}$$

cu :

$$v_{Gf} = \dot{y}_{Gf} = V_{Gf}\omega_s, \tag{1.9}$$

unde

$$V_{Gf} = \sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[-a_\lambda^k \sin(\lambda\theta_s) + b_\lambda^k \cos(\lambda\theta_s)]; \tag{1.10}$$

— *traversa iței din spate* (Ts), în mișcare de translație rectilinie oscilatorie pe verticală, după ecuația, [1] :

$$y_{Gs} = y_{k'} - l_s = \frac{1}{2} a_0^{k'} + \sum_{\lambda=1}^{5} [a_\lambda^{k'} \cos(\lambda\theta_s) + b_\lambda^{k'} \sin(\lambda\theta_s) - l_s, \tag{1.11}$$

cu :

$$v_{Gs} = \dot{y}_{Gs} = V_{Gs}\omega_s, \tag{1.12}$$

unde :

$$V_{Gs} = \sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[-a_\lambda^{k'} \sin(\lambda\theta_s) + b_\lambda^{k'} \cos(\lambda\theta_s)]; \tag{1.13}$$

— *ița din față If*, în mișcarea de translație rectilinie oscilatorie pe verticală după legea $y_k = y_k(\theta_s)$, din relația (1.8), cu $v_k = v_{Gf}$ dat de relația (1.9).

— *ița din spate Is*, aflată în mișcare de translație rectilinie oscilatorie pe verticală, după ecuația $y_{k'} = y_{k'}(\theta_s)$ din relația (1.11), cu $v_{k'} = v_{Gs}$ dat de relația (1.12).

— *axul scripeților* (Sc), în mișcare de rotație oscilatorie în jurul axei sale geometrice orizontale, după ecuația

$$\varphi_{Sc} = \frac{1}{r_s}\left[\frac{1}{2} a_0^s + \sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[a_\lambda^s \cos(\lambda\theta_s) + b_\lambda^s \sin(\lambda\theta_s)]\right], \tag{1.14}$$

cu :

$$\omega_{Sc} = \dot{\varphi}_{Sc} = \Omega_{Sc}\omega_s, \tag{1.15}$$

unde :

$$\Omega_{Sc} = \frac{1}{r_s}\left[\sum_{\lambda=1}^{5} \lambda[-a_\lambda^s \sin(\lambda\theta_s) + b_\lambda^s \cos(\lambda\theta_s)\right]; \tag{1.16}$$

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier, respectiv a_0, a_λ, b_λ, a_0', a_λ', b_λ', a_0^k, a_λ^k, b_λ^k, $a_0^{k'}$, $a_\lambda^{k'}$, $b_\lambda^{k'}$, a_0^s, a_λ^s, b_λ^s ($\lambda = 1,2,\ldots 5$), au valorile determinate, [1].

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII SISTEMULUI MECANIC

Sistemul mecanic are un singur grad de libertate iar drept parametru lagrangean va fi ales unghiul de rotație al arborelui secundar θ_s.

$$q = \theta_s. \tag{2.1}$$

Ecuația Lagrande care va descrie mișcarea acestui sistem mecanic va avea forma [2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta_s} = Q_a + Q_d, \tag{2.2}$$

unde :

E_c — este energia cinetică a sistemului mecanic;

Q_a — este forța generalizată activă corespunzătoare sistemului mecanic;

Q_d — este forța generalizată disipativă corespunzătoare sistemului mecanic.

Pentru modelarea matematică a funcționării sistemului mecanic se adoptă următoarele ipoteze simplificatoare de lucru :

1. Se neglijează frecările în articulațiile elementelor cu mișcări de rotație oscilatorie.

2. Se ia în considerație momentul rezultant de frecare în lagărele axului secundar, presupus însă constant în decursul unui ciclu de funcționare a mașinii

$$M_{fr} = C = \text{constant}; \tag{2.3}$$

3. Masele traverselor ițelor din față și din spate se consideră egale ($M_{Tf} = M_{Ts} = M_T(\text{kg})$).

4. Masele ițelor din față și din spate sînt considerate egale ($M_{If} = M_{Is} = M_I(\text{kg})$).

5. Masele pedalelor ițelor din față și din spate se consideră egale ($M_{Pd_f} = M_{Pd_s} = M_P(\text{kg})$).

Se introduc următoarele notații :

$K_{Sc}(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ — momentul de inerție al axului scripeților în raport cu axa sa de rotație.

$J_{Pd_f} = J_{Pd_s} = J_P(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ — momentul de inerție al pedalelor în raport cu axele lor de oscilație.

a) *Calculul energiei cinetice a sistemului mecanic.* Energia cinetică a sistemului mecanic reprezentat prin mecanismul de formare a rostului este dată de relația

$$Ec = Ec_{As} + Ec_{Pd_f} + Ec_{Pd_s} + Ec_{Tf} + Ec_{Ts} + Ec_{If} + Ec_{Is} + Ec_{Sc}, \quad (2.4)$$

unde:

$$Ec_{As} = \frac{1}{2} J_{As} \cdot \omega_s^2, \quad (2.5)$$

este energia cinetică a arborelui secundar al mașinii,

$$Ec_{Pd_f} = \frac{1}{2} J_P \omega_{pd}^2 = \frac{1}{2} J_P \Omega_{pd}^2(\theta_s)\, \omega_s^2, \quad (2.6)$$

este energia cinetică a pedalei iței din față,

$$Ec_{Pd_s} = \frac{1}{2} J_P \omega_{pd}'^2 = \frac{1}{2} J_P \Omega_{pd}'^2(\theta_s)\, \omega_s^2, \quad (2.7)$$

este energia cinetică a pedalei iței din spate,

$$Ec_{Tf} = \frac{1}{2} M_T v_{Gf}^2 = \frac{1}{2} M_T V_{Gf}^2 \omega_s^2, \quad (2.8)$$

este energia cinetică a traversei iței din față,

$$Ec_{Ts} = \frac{1}{2} M_T v_{Gs}^2 = \frac{1}{2} M_T V_{Gs}^2 \omega_s^2, \quad (2.9)$$

este energia cinetică a traversei iței din spate

$$Ec_{If} = \frac{1}{2} M_I v_k^2 = \frac{1}{2} M_I V_{Gf}^2 \omega_s^2, \quad (2.10)$$

este energia cinetică a iței din față,

$$Ec_{Is} = \frac{1}{2} M_I v_k^2 = \frac{1}{2} M_I V_{Gs}^2 \omega_s^2, \quad (2.11)$$

este energia cinetică a iței din spate și

$$Ec_{Sc} = \frac{1}{2} J_{Sc} \cdot \omega_{Sc}^2 = \frac{1}{2} J_{Sc} \Omega_{Sc}^2 \omega_s^2, \quad (2.12)$$

este energia cinetică a axului scripeților.

Rezultă astfel următoarea expresie a energiei cinetice a sistemului mecanic:

$$Ec = \frac{1}{2} \Big\{ J_{As} + J_P[\Omega_{pd}^2(\theta_s) + \Omega_{pd}'(\theta_s)] + (M_I + M_T)[V_{Gf}^2(\theta_s) + V_{Gs}^2(\theta_s)] + \\ + J_{Sc}\Omega_{Sc}^2(\theta_s) \Big\} \omega_s^2 = \frac{1}{2} J(\theta_s)\, \omega_s^2, \quad (2.13)$$

unde :

$J(\theta_s)$ este momentul de inerție al sistemului mecanic redus la axa de rotație a arborelui secundar.

b) *Calculul forței generalizate active.* Solicitările active la care se consideră supus, în ipotezele de lucru adoptate, mecanismul de formare a rostului, sînt reprezentate prin :

— *cuplul motor* de moment $M_m < 0$, figura 2, transmis de la arborele principal, care în condițiile considerării întregii mașini reprezintă o solicitare interioară ; acestui moment îi corespunde forța generalizată activă motoare, avînd expresia :

Fig. 2

$$Qa_m = M_m \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta_s} = M_m < 0 ; \quad (2.14)$$

— *greutatea pedalei iței din față*, figura 3, aplicată în centrul de greutate $G_{Pd_f}(a_f, b_f)$ al pedalei, cu momentul în polul Q avînd următoarea valoare scalară raportată la versorul k' al axei Qz' (Qz' perpendicular pe planul $Qx'y'$) a reperului atașat pedalei :

$$M_Q(P_{Pd_f}) = -M_p g[a_f \cos \varphi_{pd} - b_f \sin \varphi_{pd}]. \quad (2.15)$$

Acestui moment îi corespunde următoarea forță generalizată activă :

$$Qa_{Pd_f} = M_Q(\bar{P}_{Pd_f}) \frac{\partial \varphi_{pd}}{\partial \theta_s} = -M_p g \Omega_{pd}(\theta_s)[a_f \cos \varphi_{pd} - b_f \sin \varphi_{pd}] ; \quad (2.16)$$

— *greutatea pedalei iței din spate*, figura 4, aplicată în centrul de greutate $G_{Pd_s}(a_s, b_s)$ al pedalei cu următorul moment în raport cu axa sa :

$$M_Q(\bar{P}_{Pd_s}) = -M_p g[a_s \cos \varphi'_{pd} - b_s \sin \varphi'_{pd}], \quad (2.17)$$

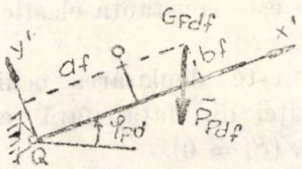


Fig. 3

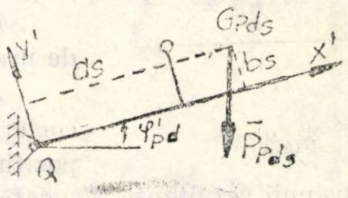


Fig. 4

căruia îi corespunde forța generalizată activă :

$$Qa_{Pd_s} = M_Q(\bar{P}_{Pd_s}) \frac{\partial \varphi'_{pd}}{\partial \theta_s} = -M_p g \Omega'_{pd}(\theta_s)[a_s \cos \varphi'_{pd} - b_s \sin \varphi'_{pd}] ; \quad (2.18)$$

— *greutatea traversei iței din față*, $\bar{P}_{T_f} = M_T \bar{g}$, căreia îi corespunde următoarea forță generalizată :

$$Qa_{T_f} = -M_T g \frac{\partial y_{G_f}}{\partial \theta_s} = -M_T g V_{G_f}(\theta_s) ; \quad (2.19)$$

— *greutatea traversei iței din spate*, $\bar{P}_{Ts}=M_T\bar{g}$, căreia îi corespunde forța generalizată :

$$Qa_{Ts} = -M_T g \frac{\partial y_{Gs}}{\partial \theta_s} = -M_T g V_{Gs}(\theta_s) \tag{2.20}$$

— *greutatea iței din față* $\bar{P}_{If} = M_I\bar{g}$, a cărei forță generalizată are expresia :

$$Qa_{If} = -M_I g \frac{\partial y_k}{\partial \theta_s} = -M_I g V_{Gf}(\theta_s); \tag{2.21}$$

— *greutatea iței din spate* $\bar{P}_{Is} = M_I\bar{g}$, pentru care forța generalizată are expresia :

$$Qa_{Is} = -M_I g \frac{\partial y_{k'}}{\partial \theta_s} = -M_I g V_{Gs}(\theta_s); \tag{2.22}$$

— *tensiunea rezultantă a firelor din ița din față* considerată cunoscută [1], ea avînd următoarea expresie a valorii scalare, raportată la versorul axei Oy, figura 5

$$T_r = -(T_0 + 3{,}944\, k_{ef}^2 S_k^2)(\sin \alpha_{1m} + \sin \alpha_{2m}) =$$

$$= -(T_0 + 3{,}944 \cdot k_{ef} S_k^2) S_k \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}1081 + S_k^2}} + \frac{1}{\sqrt{0{,}0483 + S_k^2}} \right], \tag{2.23}$$

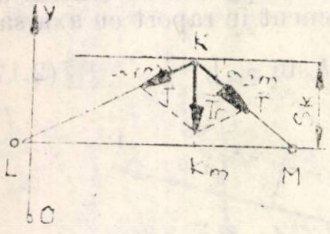


Fig.5

unde :

T_0 — reprezintă tensiunea de lucru corespunzătoare rostului închis ($S_k = 0$)

k_{ef} — este constanta elastică a firelor de urzeală

S_k — este deplasarea ochiului K al cocleților iței din față, față raportată la poziția K_m, ($S_k = 0$).

Tensiunii rezultante T_r, dată de relația (2.23) îi corespunde următoarea forță generalizată :

$$Qa_{tf} = T_r \frac{\partial y_k}{\partial \theta_s} = -(T_0 + 3{,}944\, S_k^2)\, S_k V_{Gf}(\theta_s) \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}1081 + S_k^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{0{,}0483 + S_k^2}} \right]; \tag{2.24}$$

— *tensiunea rezultantă a firelor din ița din spate* considerată de asemenea cunoscută, [1], ea avînd următoarea expresie a valorii scalare

raportate la versorul Oy, (fig. 6) :

$$T'_r = -(T_0 + 3{,}696 \cdot k_{ef} S'^2_k)(\sin \alpha'_{1m} + \sin \alpha'_{2m}) =$$

$$= -(T_0 + 3{,}696 \cdot k_{ef} S'^2_k) S'_k \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}1081 + S'^2_k}} + \frac{1}{\sqrt{0{,}0483 + S'^2_k}} \right]. \quad (2.25)$$

Acestei tensiuni îi corespunde forța generalizată :

$$Qa_{ts} = T'_r \frac{\partial y_{k'}}{\partial \theta_s} =$$

$$= -(T_0 + 3{,}696\, S'^2_k) S'_k V_{Gs}(\theta_s) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\sqrt{0{,}1081 + S'^2_k}} + \frac{1}{\sqrt{0{,}0483 + S'^2_k}} \right] \quad (2.26)$$

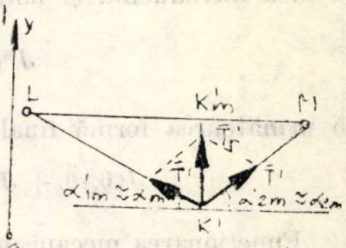


Fig. 6

În baza relațiilor (2.14), (2.16), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) (2.24) și (2.26) se obține expresia forței generalizate active :

$$Qa = M_m + Qa_{Pd_f} + Qa_{Pd_s} + Qa_{T_f} + Qa_{T_s} + Qa_{If} + Qa_{Is} + Qa_{tf} + Qa_{ts}, \quad (2.27)$$

sau dacă se notează cu $-Q(\theta_s)$ suma termenilor dependenți de unghiul de rotație al arborelui secundar θ_s, din expresia (2.27), adică

$$Q_s = -(Qa_{Pd_f} + QA_{Pd_s} + Qa_{T_f} + Qa_{T_s} + Qa_{If} + Qa_{Is} + Qa_{tf} + Qa_{ts}) \quad (2.28)$$

rezultă forma finală a forței generalizate active

$$Q_a = M_m - Q_s \quad (2.29)$$

c) *Calculul forței generalizate disipative*. Conform ipotezelor de lucru adoptate, singura solicitare disipativă care va trebui luată în considerație este momentul cuplului rezultant de frecare în lagărele arborelui secundar, moment avînd valoarea constantă (2.3) și căruia îi corespunde forța generalizată disipativă

$$Q_d = M_{fr} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta_s} = M_{fr} = C > 0 \quad (2.30)$$

În baza relațiilor (2.13), (2.29) și (2.307) rezultă următoarea formă concretă pentru *ecuația diferențială* (2.2), *care descrie funcționarea mecanismului de formare a rostului* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [J(\theta_s)\omega_s] + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}J(\theta_s)}{\mathrm{d}\theta_s} \omega_s^2 = -Q(\theta_s) + M_m + C, \quad (2.31)$$

unde

$$J(\theta_s)\omega_s = \frac{\partial E_c}{\partial v_s} = \frac{\partial E_c}{\partial \omega_s}. \quad (2.32)$$

Efectuînd derivarea în membrul stîng al ecuației (2.31), se mai poate scrie această ecuație sub forma de mai jos :

$$J(\theta_s)\ddot{\theta}_s + \frac{1}{2}\frac{dJ(\theta_s)}{d\theta_s}\dot{\theta}_s^2 = M_m - Q(\theta_s) + C, \tag{2.33}$$

sau încă introducînd și notația :

$$J^*(\theta_s) = \frac{1}{2}\frac{dJ(\theta_s)}{d\theta_s}, \tag{2.34}$$

sub următoarea formă finală :

$$J(\theta_s)\ddot{\theta}_s + J^*(\theta_s)\dot{\theta}_s^2 + Q(\theta_s) = M_m + C \tag{2.35}$$

Funcționarea mecanismului de funcționare a rostului va fi descrisă de ecuația diferențială (2.35).

3. CONSIDERAȚII TEORETICE PRIVIND COMPORTAMENTUL DINAMIC AL MECANISMULUI DE FORMARE A ROSTULUI

Ecuația diferențială (2.35) care modelează matematic, sub formă diferențială, comportamentul dinamic al mecanismului de formare a rostului, permite să se facă următoarele două serii de considerații teoretice :

— să se discute funcționarea mecanismului în mișcarea de regim tranzitoriu ;

— să se analizeze funcționarea în regim permanent a mecanismului.

Se face precizarea că în ambele situații momentul rezultant de frecare în lagărele arborelui secundar va fi considerat constant, el putînd fi evaluat prin determinări experimentale.

3.1. CONSIDERAȚII TEORETICE PRIVIND FUNCȚIONAREA MECANISMULUI DE FORMARE A ROSTULUI ÎN REGIM TRANZITORIU

a) *Studiul funcționării mecanismului în faza de regim tranzitoriu la pornire.* În cazul cînd se cunoaște caracteristica mecanică a motorului electric de acționare a mașinii de țesut $M_{cup} = M_{cup}(\omega_1)$, [3], figura 7, rezultă că va fi cunoscută și dependența momentului motor Mm ce va fi aplicat arborelui secundar al mașinii, de viteza unghiulară a acestui arbore, reprezentînd și viteza generalizată a sistemului mecanic pe care-l formează mecanismul de formare a rostului, adică funcția :

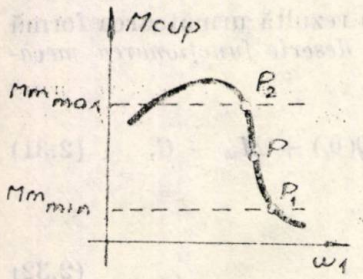


Fig. 7

$$Mm = -F(\omega_s) = -F(\dot{\theta}_s), \tag{3.1}$$

semnul (—) din momentul drept fiind justificat de faptul că așa cum au fost alese

reperul fix și reperele invariabil atașate elementelor mecanismului, valoarea scalară a acestui moment este negativă.

În această situație ecuația diferențială (2.35) va lua forma:

$$J(\theta_s)\ddot{\theta}_s + J^*(\theta_s)\dot{\theta}_s^2 + F(\dot{\theta}_s) + Q(\theta_s) = C, \tag{3.2}$$

ei asociindu-i-se condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} \theta_s(0) = \theta_s^0; \\ \dot{\theta}_s(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Prin integrarea numerică a ecuației diferențiale (3.2) se poate obține tabelar legea de variație în timp a unghiului θ_s pînă la atingerea vitezei unghiulare de regim.

b) *Studiul funcționării mecanismului în faza de regim tranzitoriu la oprire.* Comportamentul dinamic al mecanismului de formare a rostului la oprirea mașinii va fi caracterizat prin condiția:

$$Mm \equiv 0, \tag{3.4}$$

în baza căreia ecuația diferențială (2.35) va lua forma

$$J(\theta_s)\ddot{\theta}_s + J^*(\theta_s)\dot{\theta}_s^2 + Q(\theta_s) = C, \tag{3.5}$$

ei asociindu-i-se acum condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} \theta_s(0) = \theta_s^0; \\ \dot{\theta}_s(0) = \omega_s^0, \end{cases} \tag{3.6}$$

ω_s^0 fiind viteza unghiulară de regim a arborelui secundar.

Și în acest caz, integrarea numerică a ecuației diferențiale (3.5) poate permite stabilirea, sub formă tabelară, a dependenței unghiului θ_s de timp, precum și legea de variație în timp a vitezei unghiulare a arborelui secundar; prin interpolare, se poate stabili și o relație analitică pentru exprimarea acestei ultime dependențe, care ar putea fi folosită pentru minimizarea timpului de oprire a mecanismului.

3.2. CONSIDERAȚII TEORETICE PRIVIND FUNCȚIONAREA ÎN REGIM PERMANENT A MECANISMULUI DE FORMARE A ROSTULUI

În cazul cînd viteza unghiulară a arborelui secundar a atins valoarea de regim ω_s^0, care rămîne practic constantă pentru variații destul de mari ale momentului cuplului motor între valorile Mm_{min} și Mm_{max}, se poate admite condiția:

$$\dot{\theta}_s = \omega_s \approx \omega_s^0, \tag{3.7}$$

cu consecințele:

$$\ddot{\theta}_s \equiv 0 \tag{3.8}$$

și

$$\theta_s = \omega_s^0 t + \theta_s^0 \tag{3.9}$$

În aceste condiții ecuația diferențială (2.35) ia forma:

$$J^*(\theta_s)\omega_s^{0^2} + Q(\theta_s) = Mm + C, \tag{3.10}$$

care permite să se stabilească dependența momentului cuplului motor de unghiul de rotație θ_s al arborelui secundar:

$$Mm = -[C - J^*(\theta_s)\omega_s^{0^2} - Q(\theta_s)] \tag{3.11}$$

Relația precedentă, în care funcțiile $J^*(\theta_s)$ și $Q(\theta_s)$ sînt periodice, de perioadă 2π, permite:

— să se determine valorile extreme Mm_{min} și Mm_{max} și să se aleagă electromotorul a cărei caracteristică mecanică asigură turație constantă între aceste limite.

— să se calculeze puterea consumată de electromotorul de acționare a mașinii în regim permanent, aceasta fiind dată de relația:

$$Pm = Mm\omega_s^0 = -[C - J^*(\theta_s)\omega_s^{0^2} - Q(\theta_s)]\omega_s^0 \tag{3.12}$$

— să se minimizeze energia consumată de electromotor.

Primit în redacție la 15 octombrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. CORINA FETECĂU, *Contribuții privind optimizarea unor parametri constructivi și funcționali ai mașinilor de țesut asimilate în țară*, Teză de doctorat, Inst. Politehnic, Iași, 1988.
2. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica sistemelor de rigide*, Edit. tehnică, București, 1980.

* * * *The third interna'ional conference on rotordynamics* (A treia conferință internațională asupra dinamicii rotorilor), Lyon, 10—12 September, 1990, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1990, 622 pag.

În ultimii ani, dinamica sistemului rotor-lagăre s-a bucurat de o atenție deosebită, constituind subiectul multor conferințe internaționale, monografii, cursuri universitare.

În perioada 10—12 septembrie 1990 a avut loc la Lyon cea de-a treia conferință internațională asupra dinamicii rotorilor, reunind comunicări din 20 de țări din Europa, America, Asia și Australia. Conferința a fost organizată de Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, sub conducerea prof. Michel Lalanne și a avut drept sponsori instituții și firme de prestigiu din Franța, cum sînt : Commissariat a L'Energie Atomique, Centre National de la Recherche Scientifique, Société pour la Mesure et le Traitement des Vibrations et du Bruit, Microturbo S.A., Société National d'Etude et de Construction de Moteurs d'Aviation, Technofan, Thermodyn, Turbomeca și altele.

Conferința a reliefat interesul deosebit asupra dinamicii sistemului rotor-lagăre, cercetările contribuind la îmbunătățirea randamentului și fiabilității mașinilor.

Astfel, referatele tratează metode noi privind măsurarea coeficienților elastici și de amortizare ai filmului de lubrefiant din lagărele de alunecare ; metode de identificare și de validare a modelelor utilizînd tehnici dinamice de testare ; metode iterative de calcul al răspunsului de dezechilibru.

Aspecte care s-au bucurat de o atenție deosebită din partea participanților au fost cele care au tratat despre dinamica lagărelor, calculul răspunsului de dezechilibru, stabilitate, echilibrarea, vibrațiile torsionale și condițiile de monitorizare.

Pe lîngă acestea, conferința a reunit și lucrări privind : modelarea, identificarea, diagnosticarea, discurile și paletele, aplicațiile industriale.

Cele 93 de lucrări prezentate în cadrul Conferinței au fost publicate într-un volum de 622 de pagini, în condiții grafice deosebite.

Gh. Buzdugan și I. Părăușanu

M. LALANNE, G. FERRARIS, *Rotordynamics Prediction in Engineering* (Predicția comportării dinamice a rotorilor mașinilor), John Wiley & Sons, Chichester, 1990, 198 p.

Titlul cărții lui Michel Lalanne și Guy Ferraris impune cîteva precizări ; el s-ar putea traduce „Predicția comportării dinamice a rotorilor mașinilor", în intenția de a ne apropia cît mai mult de ideea autorilor.

Este vorba de cea mai recentă carte de „Dinamica rotorilor", în care se tratează doar aspectele de calcul dinamic în stadiul de proiectare a mașinii, fără să se abordeze problemele măsurării vibrațiilor și a echilibrării rotorului mașinii deja fabricate. De aici, orientarea precizată în titlu, doar spre „predicția" comportării dinamice a sistemului rotor-lagăre, absolut necesară în vederea evitării unor modificări constructive ale mașinii gata executate. Un alt aspect distinctiv este caracterul aplicativ „ingineresc" al cărții, eliminarea oricăror dezvoltări teoretice inutile și prezentarea celor mai simple soluții pentru modelarea răspunsului dinamic al rotorilor mașinilor.

Toate aplicațiile și rezultatele prezentate în lucrare au fost obținute folosind programe de calcul dezvoltate la I.N.S.A. Lyon. Utilizarea unui post-procesor grafic implementat pe stații de lucru tip APOLLO DN3000, a permis ilustrarea cărții cu multe diagrame Campbell, diagrame de răspuns la dezechilibru, reprezentări spațiale ale deformatelor dinamice combinate cu orbite de precesie ale rotorilor, precum și vibrograme ale răspunsului tranzitoriu, deosebit de utile la înțelegerea fenomenelor prezentate.

Autorii au adoptat o metodă sistematică dar practică de prezentare, pentru a face cartea scurtă și utilă, ușor de citit și de înțeles. Pentru abordarea ei sînt necesare totuși cunoștințe

preliminare de mecanica rigidului, rezistența materialelor, calcul matriceal, ecuații diferențiale și vibrații mecanice.

În primul capitol sînt expuse succint caracteristicile elementelor componente ale unui rotor, energia cinetică a unui disc, energiile cinetică și potențială ale arborelui, lucrul mecanic virtual al forțelor din lagăre și etanșări, precum și energia cinetică a unei mase excentrice.

În capitolul 2 se prezintă modele simple de rotori și fenomene de bază în dinamica rotorilor, descrise de ecuații ce pot fi rezolvate, în absența amortizării, prin calcule manuale. Pentru rotorul cu un disc se calculează variația frecvențelor proprii în funcție de turație (diagrama Campbell), răspunsul la dezechilibru, la o forță asincronă și la o forță armonică fixă în spațiu, precum și calculul limitei de stabilitate. În final se arată influența amortizării.

Capitolul al treilea introduce ecuațiile de mișcare ale rotorilor turbomașinilor și metodele numerice utilizate pentru rezolvarea acestora. Se prezintă matricele de inerție, de rigiditate și de amortizare necesare analizei cu elemente finite. Deosebit de eficientă se dovedește metoda de condensare pseudo-modală utilizată pentru reducerea ordinului modelului. Se tratează atît cazul mașinilor cu un singur rotor cît și cel al mașinilor cu doi rotori coaxiali cuplați între ei.

Capitolul al patrulea este consacrat aplicării metodei de calcul bazate pe analiza cu elemente finite la calculul unor rotori cu mai multe discuri. Se prezintă un test asupra preciziei metodei pseudo-modale, cîteva comentarii utile asupra modelării arborilor și discurilor rotorilor, precum și particularitățile răspunsului dinamic a doi rotori coaxiali.

În capitolul 5 sînt expuse exemple de aplicații industriale vizînd calculul comportării dinamice la încovoiere a rotorilor mai multor tipuri de mașini : un compresor centrifugal cu abur, trei tipuri de compresoare cu gaz, dintre care unul cu lagăre magnetice, o turbină cu gaze, o turbină industrială cu abur, axul principal al unei mașini textile și un motor cu reacție. Exemplele sînt amplu ilustrate cu diagrame Campbell, forme modale spațiale și diagrame de răspuns la dezechilibru.

Capitolul 6 tratează mișcările tranzitorii ale rotorilor la pornire și oprire, cu referiri speciale la trecerea prin turațiile critice.

Capitolul 7 este consacrat vibrațiilor torsionale ale rotorilor, incluzînd determinarea modurilor proprii de vibrație ale sistemelor ramificate, precum și mișcările tranzitorii datorite pornirii și scurt-circuitelor în motoare și generatoare electrice.

În capitolul 8 se tratează pe scurt cazul rotorului cu secțiune tranversală nesimetrică, a cărui mișcare este descrisă de ecuații cu coeficienți periodici, precum și cazul cînd influența cuplului axial nu mai poate fi neglijată.

Bibliografia cuprinde 53 titluri reprezentative, acoperind principalele publicații în acest domeniu, precum și o serie de teze de doctorat și rapoarte de cercetare efectuate sub conducerea autorilor la I.N.S.A. Lyon.

Cartea se adresează inginerilor mecanici și energeticieni, cercetătorilor și studenților cu preocupări în proiectarea mașinilor rotative. Parte din materialul prezentat a fost utilizat de autorul recenziei pentru cursul postuniversitar de Dinamica rotorilor la Institutul Politehnic București suscitînd interesul cursanților.

Consider oportună publicarea traducerii în limba română a cărții lui Lalanne și Ferraris, care se va doveni un instrument util pentru proiectanții de mașini rotative și pentru studenții facultăților cu profil mecanic.

M. Radeș

K. H. HOLST, *Brücken aus Stahlbeton und Spannbeton* (Poduri din beton armat și beton precomprimat), Ernst u. Sohn, Berlin, 1990, 489 pag., 446 fig., 43 tab., 71 ref. bibl.

Betonul armat și cel precomprimat reprezintă materialele de bază pentru o categorie importantă de poduri ș.a. cele uzuale pentru șosele și căi ferate. Cartea autorului german prezintă în 10 capitole proiectarea și alcătuirea constructivă a acestor construcții inginerești.

Primele trei capitole se referă la elemente introductive, cum sînt bazele calculului podurilor, alegerea formei acestora și cerințele constructive impuse. Se discută necesitatea prescripțiilor tehnice, încărcările podurilor de șosea și a celor de cale ferată, secțiunea transversală și cea longitudinală a podurilor și principalele sisteme constructive : grinzi, cadre, arce și grinzi cu zăbrele — cu exemple de realizări remarcabile. Exploatarea celor două tipuri de căi de comunicație determină alegerea caracteristicilor geometrice și mecanice ale podurilor.

Suprastructurile podurilor sînt tratate în capitolul patru, cel mai voluminos. Se prezintă pe larg calculul eforturilor, dimensionarea elementelor din beton armat și din beton precomprimat și principiile alcătuirii constructive. Capitolul se încheie cu exemple de proiectare. Urmează studiul culeelor în capitolul cinci și al pilelor în capitolul șase, cu exemple de calcul. Capitolul șapte se ocupă de reazemele fixe și de cele mobile, ce leagă supra- de infrastructura.

Următoarele două capitole cuprind date privind rosturile, balustradele și scurgerile.

Cartea se încheie cu un capitol voluminos referitor la eșafodaje, rolul acestora, materialele utilizate, alcătuirea constructivă, bazele calculului, moduri de execuție și exemple de calcul.

Prezentarea foarte clară face ca lucrarea de față să constituie o contribuție importantă la studiul podurilor masive cu deschideri obișnuite ; în același timp cuprinde elementele necesare abordării problemelor podurilor cu deschideri mari și foarte mari.

R. Friedrich

J. GAUCHEL (ed.), *K—I Forschung im Baubereich* (Cercetări privind inteligența artificială în domeniul construcțiilor) Ernst u. Sohn, Berlin, 1990, 258 pag., 162 fig., 1 tab.

În octombrie 1990 a avut loc — la Universitatea Karlsruhe — un simpozion consacrat aplicării inteligenței artificiale în arhitectură și construcții. Lucrările prezentate sînt foarte eterogene cuprinzînd contribuții legate de domenii de utilizare eficientă, posibilități de proiectare a construcțiilor civile și probleme de detaliere a betonului armat.

Volumul cuprinde 17 lucrări realizate de 28 autori din RFG, SUA, Elveția și RSF Iugoslavia. Sistemele descrise se află în stadiul de concepte, de prototipuri în cercetare sau de aplicații practice.

Trei lucrări se ocupă de proiectarea secțiunilor orizontale ale clădirilor, două de proiectarea instalațiilor în construcții, cinci de dimensionarea și alcătuirea elementelor din beton armat monolit și prefabricat, iar cîte una de calculul construcțiilor metalice, de zidărie și de lemn. Se prezintă de asemenea sisteme export pentru proiectarea construcțiilor și posibilități de modelare a unor suprafețe utilizator pentru ingineria structurală.

Dezvoltarea proiectării asistate de calculator, documentată în volumul de față, indică faptul că într-un viitor apropiat se va beneficia de o nouă generație de sisteme de lucru.

R. Friedrich

P. WAGNER, *Meerestechnik. Eine Einführung für Bauingenieure* (Tehnica marină. O introducere pentru ingineri constructori), Ernst u. Sohn, Berlin, 1990, 262 pag., 123 fig., 20 tab., bibl. pe capitole.

Exploatarea țițeiului și a gazelor naturale în mediul marin devine din ce în ce mai importantă. Crearea în acest scop a platformelor marine reprezintă un domeniu de activitate interesant și complex.

Cartea de față oferă, în opt capitole, o imagine de ansamblu asupra stadiului actual de dezvoltare a acestei tehnici, referindu-se și la lucrări costiere.

Capitolul introductiv definește domeniul investigat, prezentînd și un scurt istoric al construcțiilor marine — de la cheiuri și porturi în antichitate pînă la platformele marine apărute începînd cu anii șaizeci ai secolului nostru.

Acțiunile asupra construcțiilor marine fac obiectul capitolului doi. Studiul acestora este mult mai complex decît în cazul construcțiilor terestre, nu numai datorită faptului că caracterul lor stohastic este pronunțat. O atenție deosebită se acordă vîntului, curenților marimi și valurilor. Capitolul trei cuprinde date complete privind determinarea încărcărilor asupra construcțiilor tratate în carte.

După un scurt capitol privind metodica proiectării construcțiilor marine, capitolul cinci se ocupă de fundații. Cel mai voluminos capitol al cărții cuprinde prezentarea construcțiilor pentru extracția țițeiului și a gazelor, amintind și de primele sonde din 1900 în Marea Caspică

și în vecinătatea coastei de vest a SUA. Calculul platformelor rigide din oțel și beton, a celor flexibile, plutitoare și subacvatice necesită cunoștințe aprofundate de mecanica construcțiilor. Construcțiile sub acțiunea gheții — în regiuni arctice — fac obiectul capitolului șapte, cu un studiu al gheții sub aspectul formării, al formelor de prezentare, proprietăților și acțiunii asupra construcțiilor. Cartea se încheie cu prezentarea principalelor materiale de construcție : oțelul, betonul și betonul armat.

Lucrarea de față este prima care tratează toate aspectele mecanice și tehnologice ale construcțiilor sub acțiunea apei, vîntului și gheții, cu accentul pe platformele marine. Cuprinzînd și numeroase exemple de realizări remarcabile în acest domeniu, este foarte interesantă și utilă.

R. Friedrich

R. SZILARD, *Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik, Band 2 : Flächentragwerke* (Metode finite în mecanica structurilor, vol. 2 : Structuri din plăci), Ernst u. Sohn, Berlin, 1990, 862 pag., 356 fig., 54 tab., bibl. pe capitole.

Volumul doi al lucrării cunoscutului profesor R. Szilard se ocupă de metoda diferențelor finite, metoda rețelelor, metoda elementelor finite și metoda elementelor de frontieră în probleme de plăci plane și curbe.

După o prezentare a posibilităților actuale ale microcalculatoarelor în capitolul introductiv, capitolul 2 dă o scurtă privire asupra teoriei clasice a plăcilor. Următoarele trei capitole cuprind diferențele finite obișnuite și de ceie îmbunătățite în probleme de statică, de vibrații și de stabilitate. Capitolul 6 se referă la metoda rețelelor (teoria echivalențelor), bazată pe discretizarea structurilor continue printr-un sistem de bare.

Metodei elementelor finite îi este rezervat cel mai mare volum al cărții — capitolele 7 pînă la 11. După elemente de bază în capitolul 7, capitolul 8 se ocupă de calculul plăcilor plane acționate în planul lor median și perpendicular pe acesta, capitolul 9 de plăcile curbe subțiri cilindrice, axial-simetrice și oarecare, capitolul 10 de luarea în considerare a neliniarităților geometrice și fizice, iar capitolul 11 de analiza dinamică a structurilor cu metoda elementelor finite.

Capitolul 12 are ca subiect metoda elementelor de frontieră, duală metodei elementelor finite, în probleme statice și dinamice, liniare și neliniare cît și cuplarea acesteia cu metoda elementelor finite. În anexă sînt prezentate subprograme și programe bazate pe metodele de calcul tratate.

Fiecare capitol al cărții se încheie cu un rezumat și cuprinde exemple de calcul simple, exemple din practica de proiectare inginerească și probleme propuse spre rezolvare. Se fac referiri și la lucrările autorilor români Beleș, Soare și Avram și colaboratorii. Cele două volume ale cărții — primul ocupîndu-se de structuri din bare — prezintă în mod unitar metodele numerice pentru calculul structurilor mecanice. Studiul lor permite atît familiarizarea rapidă a inginerilor constructori și mecanici cu aceste tehnici cît și alegerea celei mai adecvate metode de calcul pentru o problemă concretă. Cercetătorii în domeniu găsesc subiecte ce-și așteaptă rezolvarea.

În concluzie este vorba de o lucrare unică, deosebit de valoroasă, ce va cunoaște o răspîndire largă.

R. Friedrich

NOTĂ CĂRTE AUTORI

Articolele, originale şi de înalt nivel ştiinţific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conţină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) şi locul de muncă precum şi un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele ştiinţifice şi tehnice prezentate trebuie formulate în unităţi SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar şi indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italiene etc.). Indicii inferiori şi superiori trebuie indicaţi clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor şi cu numerotarea în cifre arabe. Desenele şi diagramele trebuie executate în tuş, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble faţă de acelea finale şi cu litere scrise cu îngrijire şi suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referinţele bibliografice vor fi menţionate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrşitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referinţelor, în paranteze drepte.

Referinţele din reviste vor conţine iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanţelor internaţionale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei şi anul de apariţie în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul cărţii (subliniat cu o linie), editura, oraşul, anul apariţiei şi numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărţii, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

H. DUMITRESCU, ADELINA GEORGESCU, AL. DUMITRACHE, V. CEAUGĂ, I. S. POPOVICI, GH. GHIȚĂ, B. NICOLESCU, **Calculul elicei**, 1990, 675 p., 63 lei.

H. POPESCU, **Calculul secțiunilor elementelor din beton armat, proiectare rapidă**, 1990, 595 p., 68 lei.

D. MATEESCU, N. JUNCAN, D. PRECUPAN, D. FLORESCU, **Construcții metalice pretensionate**, 1989, 360 p., 36 lei.

R. P. VOINEA, D. C. VOICULESCU, F. P. SIMION, **Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie**, 1988, 1152 p., 95 lei.

G. V. VASILIEV, **Bazele calculului structurilor aerodinamice cu pereți subțiri**, vol. 1, 1986, 286 p., 26 lei ; vol. 2, 1988, 266 p., 30 lei.

D. MATEESCU, N. BĂLUȚ, I. CARABA, **Calculul plan și spațial al grinzilor căilor de rulare executate din oțel** 1988, 462 p., 42 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor viscoase în regim laminar**, 1987, 864 p., 71 lei.

I. ANTON, **Cavitația**, vol. I, 1984, 338 p., 47 lei ; vol. II, 1985, 720 p., 88 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUE
— SÉRIE D'ELECTROTEHNIQUE ET D'ÉNERGETIQUE

ISSN 0039 — 4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 1, 1992, P. 1—112

S.C. Universul S.A c. 3335

Lei 150 pentru persoane fizice
Lei 250 pentru persoane juridice

F2557

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

2

TOMUL 51

martie — aprilie

1992

BUDAPESTI MOSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁRA

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. CONSTANTIN ARAMĂ
Acad. GHEROGHE BUZDUGAN
Acad. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Acad. DAN MATEESCU
Acad. NICOLAE PATRAULEA
Acad. RADU VOINEA
GEORGE BĂRĂNESCU, membru corespondent
NICOLAE CRISTESCU, membru corespondent
EMANUEL DIACONESCU, membru corespondent
LAZĂR DRAGOŞ, membru corespondent
NICOLAE I. MANOLESCU, membru corespondent
GHEORGHE SILAŞ, membru corespondent
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. AUGUSTIN PETRE
Prof. MIRCEA RADEŞ
Dr. EUGEN SOÓS
Dr. doc. VIOREL VISARION

TEODOR OROVEANU, membru corespondent, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Acad. RADU VOINEA
TEODOR OROVEANU, membru corespondent, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la ORION SRL, Splaiul Independenţei 202 A, Bucureşti 6, P.O. Box 74—19 Bucureşti, Tx 11939 CBTxR, Fax (400) 424169.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125, sectorul 1, tel. 50 76 80

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 51, nr. 2 **martie — aprilie 1992**

SUMAR

STUDII

ŞT. STAICU, Relaţii matriceale în statica sistemelor de solide 115

I. STROE, Mişcarea în jurul centrului de masă a vehiculelor spaţiale pentru traiectorii date 121

S. D. MUŞAT, A. DIMOFTE, Ecuaţiile lui Lagrange în cazul mişcării relative cu aplicare la elasto-dinamica mecanismelor cu bare deformabile 129

VV. NICOLAE, VETURIA CHIROIU, Studiul micilor deformaţii ale unui corp viscoelastic aflat în mişcare de rototranslaţie finită. 141

R. ANCUŞA, Studiul comparativ din punct de vedere cavitaţional, teoretic şi experimental, al reţelelor de profile MHT 1—12. 151

I. MUŞAT, M. STOIA, Procedura de corecţie cu numărul Reynolds a polarelor unui avion 159

DELINA GEORGESCU, Aspecte ale modelării stratului limită al atmosferei. II. . . 175

. CRISTESCU, M. PECULEA, IOANA ŞERBAN, Distribuţia presiunii şi a forţelor aferente într-un lagăr radial gazodinamic. 189

L. D. STAN, MARIA STOICESCU, Înnisiparea sondelor de petrol şi gaze 201

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale şi de înalt nivel ştiinţific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conţină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) şi locul de muncă precum şi un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele ştiinţifice şi tehnice prezentate trebuie formulate în unităţi SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar şi indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori şi superiori trebuie indicaţi clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor şi cu numerotarea în cifre arabe. Desenele şi diagramele trebuie executate în tuş, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble faţă de acelea finale şi cu litere scrise cu îngrijire şi suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referinţele bibliografice vor fi menţionate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrşitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referinţelor, în paranteze drepte.

Referinţele din reviste vor conţine iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanţelor internaţionale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei şi anul de apariţie în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. roum. Sci. Techn.— Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul cărţii (subliniat cu o linie), editura, oraşul, anul apariţiei şi numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărţii, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125.

RELAȚII MATRICEALE ÎN STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE

de ȘT. STAICU

Institutul Politehnic București

Lucrarea se ocupă cu studiul echilibrului unui sistem de rigide rezemat fără frecare pe mai multe suprafețe plane sau curbe. Utilizînd metoda deplasărilor virtuale se stabilesc relații de echilibru sub forma matriceală care permit determinarea configurației de echilibru a sistemului de corpuri.

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează se exprimă, sub forma matriceală, condițiile de echilibru pentru un sistem de rigide supus la legături perfecte.

Să considerăm un reper fix $O_0x_0y_0z_0$ (T_0) în raport cu care se află în echilibru, sub acțiunea forțelor exterioare $\vec{f}_p^s$, sistemul de corpuri T_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu referențialul $O_sx_sy_sz_s$ (fig. 1).

Poziția unui rigid oarecare T_s în raport cu reperul T_{s-1} este cunoscută prin coordonatele relative $x_{s,\,s-1}$, $y_{s,\,s-1}$, $z_{s,\,s-1}$ ale originii O_s și prin unghiurile relative ale lui Euler $\psi_{s,\,s-1}$, $\theta_{s,\,s-1}$, $\varphi_{s;\,s-1}$ formate de axele O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s cu axele $O_{s-1}x_{s-1}$, $O_{s-1}y_{s-1}$, $O_{s-1}z_{s-1}$. Acești parametri de poziție formează matricele coloane

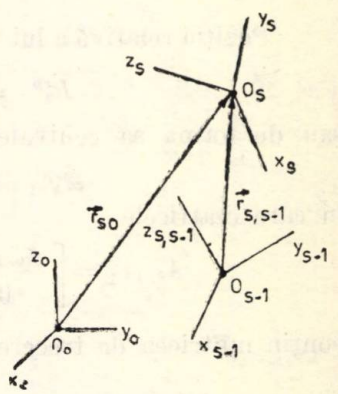


Fig. 1

$$\vec{r}_{s,\,s} = \begin{bmatrix} x_{s,\,s-1} \\ y_{s,\,s-1} \\ z_{s,\,s-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{\lambda}_{s,\,s-1} = \begin{bmatrix} \psi_{s,\,s-1} \\ \theta_{s,\,s-1} \\ \varphi_{s,\,s-1} \end{bmatrix} \quad (s = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{1}$$

care pot constitui blocurile matricelor

$$\vec{R}_{s,\,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{s,\,s-1} \\ \cdots \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{\Lambda}_{s,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \cdots \\ \vec{\lambda}_{s,\,s-1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Utilizînd matricele rotațiilor succesive în jurul originii O_s [1], se determină matricea ortogonală $a_{s,\,s-1}$ de trecere din reperul $T_{s,\,s-1}$ în T_s:

$$a_{s,\,s-1} = a_{\varphi}^{s,\,s-1} a_{\theta}^{s,\,s-1} a_{\psi}^{s,\,s-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{s,\,s-1} & \alpha_{12}^{s,\,s-1} & \alpha_{13}^{s,\,s-1} \\ \alpha_{21}^{s,\,s-1} & \alpha_{22}^{s,\,s-1} & \alpha_{23}^{s,\,s-1} \\ \alpha_{31}^{s,\,s-1} & \alpha_{22}^{s,\,s-1} & \alpha_{33}^{s,\,s-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Coordonatele originii O_s a triedrului T_s formează în reperul fix $\Omega\xi\eta\zeta$ matricea coloană

$$\vec{r}_{s0} = \sum_{k=0}^{s-1} a_{k0}^{T} \vec{r}_{k+1,k} \tag{4}$$

unde s-a notat

$$a_{k0}^{T} = \prod_{j=1}^{k} a_{j,\,j-1}^{T}. \tag{5}$$

Un punct B_p^s al rigidului T_s este reperat prin coordonatele x_p^s, y_p^s, z_p^s, care pot forma vectorul

$$\vec{r}_p^{\,s} = \begin{bmatrix} x_p^s \\ y_p^s \\ z_p^s \end{bmatrix} \tag{6}$$

și tensorul antisimetric

$$\tilde{r}_p^s = \begin{bmatrix} 0 & -z_p^s & y_p^s \\ z_p^s & 0 & -x_p^s \\ -y_p^s & x_p^s & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Poziția relativă a lui B_p^s față de T_k este dată de relația de recurență

$$\vec{R}_{k-1}^{sp} = \vec{R}_{k,\,k-1} + A_{k,\,k-1}^{T} \vec{R}_p^s \tag{8}$$

sau de forma sa echivalentă

$$\mathscr{R}_{k-1}^{sp} = \mathscr{R}_{k,\,k-1} + A_{k,\,k-1}^{T} \mathscr{R}_p^s A_{k,\,k-1}, \tag{9}$$

în care matricele

$$A_{k,\,k-1} = \left[\begin{array}{c|c} a_{k,\,k-1} & 0 \\ \hline 0 & a_{k,\,k-1} \end{array}\right], \quad \mathscr{R}_{k,k-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \pi_{k,\,k-1} & 0 \end{array}\right] \tag{10}$$

conțin matricea de trecere $a_{k,\,k-1}$ și matricea antisimetrică $\tilde{r}_{k,k-1}$.

2. METODA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Presupunînd cunoscute forțele exterioare $\vec{f}_p^{\,s}$, se pot stabili niște relații care să permită determinarea configurației de echilibru a sistemului de corpuri, dacă se utilizează metoda deplasărilor virtuale.

Pentru a materializa interacțiunea dintre elementele componente ale sistemului, vom face ipoteza că un solid oarecare T_s este rezemat în punctele B_i^s pe curbele (Γ_i^{s-1}) și în punctele B_j^s pe suprafețele $(\sum_j^{s-1})$. Aceste legături aparțin rigidului T_{s-1} solidar cu triedrul $O_{s-1}x_{s-1}y_{s-1}z_{s-1}$.

Să observăm că dacă rigidul T_s este elementul de legătură a două sau mai multe lanţuri de rigide, atunci vor apărea legături multiple ale triedrului T_s cu triedrele alăturate.

Fie

$$h_{1i}^{s-1}(x_{s-1}, y_{s-1}, z_{s-1}) = 0$$
$$h_{2i}^{s-1}(x_{s-1}, y_{s-1}, z_{s-1}) = 0 \tag{11}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l_s;\ l_s \leqslant E(m_s/2))$$

cuaţi ile curbelor (Γ_i^{s-1}) şi

$$h_j^{s-1}(x_{s-1}, y_{s-1}, z_{s-1}) = 0 \tag{12}$$
$$(j = 1 + 2l_s, \ldots, m_s;\ m_s \leqslant 6)$$

ecuaţiile suprafeţelor $(\sum_j^{s-1})$ în raport cu reperul O_{s-1}, $x_{s-1}y_{s-1}z_{s-1}$. În aceste relaţii $E(m_s/2)$ reprezintă partea întreagă a numărului $m_s/2$.

Aplicînd metoda deplasărilor virtuale, condiţia de echilibru a sistemului de solide este ca puterea virtuală a tuturor forţelor exterioare $\vec{f}_p^s$ $(p = 1, 2, \ldots, t_s)$, aplicate în punctele A_p^s, corespunzătoare unei deplasări virtuale generale a sistemului, compatibilă cu legăturile exterioare şi interioare, să fie egală cu zero. Această condiţie poate fi exprimată sub orma

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{p=1}^{t_s} f_p^s \vec{V}_{s0}^T R_p^s \vec{U}_p^s = 0, \tag{13}$$

unde

$$\vec{V}_{s0} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{s0} \\ \vec{\omega}_{s0} \end{bmatrix} \tag{14}$$

ste viteza virtuală a rigidului T_s în punctul său O_s, iar

$$\vec{U}_p^s = \begin{bmatrix} \vec{u}_p^s \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_p^s \\ \beta_p^s \\ \gamma_p^s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

eprezi ntă versorul direcţiei forţei exterioare $\vec{f}_p^s$.

Relaţia (13) poate fi scrisă astfel

$$\sum_{s=1}^{n} (\vec{v}_{s0}^T \sum_{p=1}^{t_s} f_p^s \vec{u}_p^s + \vec{\omega}_{s0}^T \sum_{p=1}^{t_s} f_p^s \tilde{r}_p^s \vec{u}_p^s) = 0, \tag{16}$$

Viteza virtuală absolută $\vec{v}_{s0}$ a originii O_s a triedrului $O_s x_s y_s z_s$ şi viteza unghiulară virtuală absolută $\vec{\omega}_{s0}$ a solidului T_s sînt exprimate în

funcţie de vitezele virtuale relative $\vec{v}_{k,\,k-1}$ ale originilor O_k, vitezele unghiulare virtuale relative $\vec{\omega}_{k,\,k-1}$ şi de tensorii antisimetrici $\tilde{\omega}_{k,\,k-1}$:

$$\vec{v}_{s0} = \sum_{k-1}^{s-1} a_{s,\,k-1}\{\vec{v}_{k,\,k-1} + \tilde{\omega}_{k,\,k-1} \sum_{q=k}^{s-1} a_{qk}^T \vec{r}_{q+1,\,q}\} + \vec{v}_{s,\,s-1}$$

$$\vec{\omega}_{s0} = \sum_{k=1}^{s} a_{sk}\vec{\omega}_{k,\,k-1} \tag{17}$$

unde matricele de trecere $a_{s,\,k-1}$, a_{sk}, a_{qk}^T au expresiile

$$a_{s,\,k-1} = \prod_{u=1}^{s-k+s} a_{s-u+1,\,s-u}$$

$$a_{sk} = \prod_{u=1}^{s-k} a_{s-u+1,\,s-u} \tag{18}$$

$$a_{qk}^T = \prod_{u=k+1}^{q} a_{u,\,u-1}^T.$$

Condiţiile cinematice de legătură, la care sînt supuse vitezele virtuale relative ale punctelor de contact B_i^s şi B_j^s se scriu

$$\begin{aligned}
&\vec{V}_{s,\,s-1}^T R_i^s A_{s,\,s-1}\vec{G}_{1i}^{s-1} = 0\\
&\vec{V}_{s,\,s-1}^T R_i^s A_{s,\,s-1}\vec{G}_{2i}^{s-1} = 0 \qquad (19)\\
&(i = 1,\, 2, \ldots, l_s)\\
&\vec{V}_{s,s-1}^T = R_j^s A_{s,\,s-1}\vec{G}_j^{s-1} = 0\\
&(j = 1 + 2\,l_s, \ldots,\ m_s;\ s = 1,\ 2, \ldots, n),
\end{aligned}$$

în care matricele

$$\vec{G}_{1i}^{s-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{1i}^{s-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_{2i}^{s-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{2i}^{s-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_j^{s-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_j^{s-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix} \tag{20}$$

conţin vectorii gradienţi $\vec{\nabla} h_{1i}^{s-1}$, $\vec{\nabla} h_{2i}^{s-1}$, $\vec{\nabla} h_j^{s-1}$.

Condiţiile de compatibilitate (19) scrise sub forma echivalentă

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_{s,\,s-1}^T a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_{1i}^{s-1} + \vec{\omega}_{s,\,s-1}^T \tilde{r}_i^s a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_{1i}^{s-1} = 0\\
&\vec{v}_{s,\,s-1}^T a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_{2i}^{s-1} + \vec{\omega}_{s,\,s-1}^T \tilde{r}_i^s a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_{2i}^{s-1} = 0 \qquad (21)\\
&(i = 1,\, 2, \ldots, l_s)\\
&\vec{v}_{s,\,s-1}^T a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_j^{s-1} + \vec{\omega}_{s,\,s-1}^T \tilde{r}_j^s a_{s,\,s-1}\vec{\nabla} h_j^{s-1} = 0\\
&(j = 1 + 2l_s, \ldots, m_s;\quad s = 1,\, 2, \ldots,\, n),
\end{aligned}$$

împreună cu (16) furnizează parametrii care fixează poziţia de echilibru a sistemului de rigide.

Observație. Dacă rigidul T_s efectuează o mișcare virtuală relativă de rostogolire și pivotare fără alunecare în punctul B_s pe o suprafață (Σ_{s-1} care aparține triedrului $O_{s-1}x_{s-1}y_{s-1}z_{s-1}$, condiția cinematică de compatibilitate

$$\widetilde{\omega}^T_{s,\,s-1}\vec{r}_s = \vec{v}_{s,\,s-1} \tag{2}$$

se adaugă la relațiile (21).

Primit în redacție la 20 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
2. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Edit. tehnică, București, 1978.
5. GH. SILAȘ, I. GROȘANU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981.

MIȘCAREA ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ A VEHICULELOR SPAȚIALE PENTRU TRAIECTORII DATE

de I. STROE

Institutul Politehnic București

În lucrare sînt prezentate aspecte ale mișcării vehiculului spațial în jurul centrului de masă sub influența momentelor gravitaționale. Sînt analizate micile oscilații ale vehiculului pentru cazurile traiectoriilor circulare și eliptice ale centrului de masă.

1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ

Mișcarea centrului de masă este precizată prin coordonatele polare r_V și ν, iar mișcarea în jurul centrului de masă prin unghiurile ψ, θ, φ.

Să considerăm un sistem de bază $Vxyz$ cu centrul în centrul V al vehiculului, avînd axa Vx în prelungirea razei vectoare, axa Oy în planul orbitei, în sensul creșterii unghiului ν și axa Vz perpendiculară pe planul orbitei astfel ca triedrul $Vxyz$ să fie ortogonal și orientat drept ([9]). Sistemul de coordonate $Vx_1y_1z_1$, legat de corp, cu axele centrale — principale se obține din sistemul de bază, prin următoarele rotații:

— o rotație în jurul axei Ox, de unghi ψ și se obține sistemul $Vx'y'z'$;

— o rotație în jurul axei Oz', de unghi θ și se obține sistemul $Vx''y''z''$;

— o rotație în jurul axei Vy'', de unghi φ și se obține triedrul $Vx_1y_1z_1$.

Legătura între sistemele $Vxyz$, $Vx_1y_1z_1$ se realizează prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

unde coeficienții a_{ij} au valorile:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\theta\cos\varphi, \\ a_{12} &= -\sin\theta, \\ a_{13} &= \cos\theta\sin\varphi, \\ a_{21} &= \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi, \end{aligned} \tag{1.2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 2, 1992, P. 121—128

$$a_{22} = \cos\psi\cos\theta$$

$$a_{23} = \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,$$

$$a_{31} = \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,$$

$$a_{32} = \sin\psi\cos\theta,$$

$$a_{33} = \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi.$$

Proiecţiile vitezei unghiulare pe axele triedrului mobil $Vx_1y_1z_1$ sînt:

$$\begin{aligned} p &= a_{11}\dot{\psi} - \dot{\theta}\sin\varphi + a_{31}\dot{\nu}, \\ q &= a_{12}\dot{\psi} + \dot{\varphi} + a_{32}\dot{\nu}, \\ r &= a_{13}\dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\varphi + a_{33}\dot{\nu}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mişcarea în jurul centrului de masă poate fi analizată cu ajutorul ecuaţiilor lui Euler:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)\,qr &= \mathcal{M}_1, \\ B\dot{q} + (A - C)\,rp &= \mathcal{M}_2, \\ C\dot{r} + (B - A)\,pq &= \mathcal{M}_3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

În relaţiile de mai sus, A,B,C sînt momente de inerţie centrale principale, iar $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ sînt momente faţă de axele triedrului $Vx_1y_1z_1$.

Dacă se consideră numai influenţele gravitaţionale deduse aproximînd corpul atractiv cu o sferă omogenă, aşa cum se arată în diverse lucrări (şi în [9]), momentele $\mathcal{M}_i$ se scriu:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= -\frac{3\mu\, a_{12}a_{13}}{r_V^3}(B - C), \\ \mathcal{M}_2 &= -\frac{3\mu\, a_{13}a_{11}}{r_V^3}(C - A), \\ \mathcal{M}_3 &= -\frac{3\mu\, a_{11}a_{12}}{r_V^3}(A - B). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Folosind (1.3) se pot calcula derivatele vitezelor unghiulare:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= a_{11}\ddot{\psi} - \ddot{\theta}\sin\varphi + \ddot{\nu}a_{31} + \dot{a}_{11}\dot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\nu}\dot{a}_{31}, \\ \dot{q} &= a_{12}\ddot{\psi} + \ddot{\varphi} + \ddot{\nu}a_{32} + \dot{a}_{12}\dot{\psi} + \dot{\nu}\dot{a}_{32}, \\ \dot{r} &= a_{13}\ddot{\psi} + \ddot{\theta}\cos\varphi + \ddot{\nu}a_{33} + \dot{a}_{13}\dot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\nu}\dot{a}_{33}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ecuaţiile (1.4) în care se înlocuiesc (1.5) şi (1.6) dau mişcarea generală a vehiculului parţial în jurul centrului de masă, mişcare influenţată de coordonatele ν, r_V şi derivatele acestora, caracteristice mişcării centrului de masă.

2. ECUAŢIILE MIŞCĂRII VEHICULULUI CU STABILIZARE GRAVITAŢIONALĂ

Pentru anumite relaţii între momentele de inerţie principale A,B,C şi pentru anumite condiţii iniţiale, vehiculul spaţial execută mici oscilaţii în jurul unei poziţii de echilibru relativ caracterizat prin :

$$\psi = \theta = \varphi = 0. \tag{2.1}$$

În cazul micilor oscilaţii coeficienţii a_{ij} din (1.2) pot fi aproximaţi prin :

$$\begin{aligned} &a_{11} \approx 1; \quad a_{12} \approx -\theta; \quad a_{13} \approx -\varphi,; \\ &a_{31} \approx -\varphi; \quad a_{32} \approx \psi; \quad a_{33} \approx 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Derivatele $\dot{a}_{ij}$ se aproximează cu :

$$\begin{aligned} &\dot{a}_{11} \approx -\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi \approx -\theta\dot{\theta} - \varphi\dot{\varphi} \approx 0; \\ &\dot{a}_{12} \approx -\dot{\theta}; \quad \dot{a}_{13} \approx \dot{\varphi}; \quad \dot{a}_{31} \approx -\dot{\varphi}; \quad \dot{a}_{32} \approx \dot{\psi}; \quad \dot{a}_{33} \approx 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Înlocuind (2.2) şi (2.3) în (1.6) se obţin derivatele vitezei unghiulare pentru mici oscilaţii :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \ddot{\psi} - \dot{\nu}\dot{\varphi} - \ddot{\nu}\varphi, \\ \dot{q} &= \ddot{\varphi} + \dot{\nu}\dot{\psi} + \ddot{\nu}\psi, \\ \dot{r} &= \ddot{\theta} + \ddot{\nu}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cu aproximaţiile de mai sus se pot scrie ecuaţiile (1.4) pentru mici oscilaţii.

2.1. CAZUL TRAIECTORIILOR CIRCULARE. Mişcarea circulară a centrului de masă este caracterizată de relaţiile :

$$\dot{\nu} = n_0 = \text{const.}; \quad r_V = p_V = \text{const.} \tag{2.5}$$

Relaţiile (2.4) devin :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \ddot{\psi} - n_0\dot{\varphi}, \\ \dot{q} &= \ddot{\varphi} + n_0\dot{\psi}, \\ \dot{r} &= \ddot{\theta}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se calculează şi produsele :

$$qr = (\dot{\varphi} + n_0\psi)\,(\dot{\theta} + n_0) \approx n_0\dot{\varphi} + n_0^2\psi,$$
$$rp = (\dot{\theta} + n_0)\,(\dot{\psi} - n_0\varphi) \approx n_0\dot{\psi} - n_0^2\varphi, \tag{2.7}$$
$$pq = (\dot{\psi} - n_0\varphi)\,(\dot{\varphi} + n_0\psi) \approx 0.$$

Cu relaţiile de mai sus, ecuaţiile mişcării în jurul centrului de masă (1.4) devin :

$$A\ddot{\psi} - (A + B - C)\,n_0\dot{\varphi} + (C - B)n_0^2\psi = \mathcal{M}_1,$$
$$B\ddot{\varphi} + (A + B - C)n_0\dot{\psi} - (A - C)n_0^2\varphi = \mathcal{M}_2, \tag{2.8}$$
$$C\ddot{\theta} = \mathcal{M}_3.$$

Momentele gravitaţionale (1.5) devin, cu proximaţiile (2.2) :

$$\mathcal{M}_1 \approx 0,$$
$$\mathcal{M}_2 = -\frac{3\mu}{r_V^3}\varphi(C - A) = -3n_0^2\varphi(C - A), \tag{2.9}$$
$$\mathcal{M}_3 = 3n_0^2\theta(A - B)$$

Introducînd (2.9) în (2.8) se obţin ecuaţiile de mişcare sub forma

$$A\ddot{\psi} - (A + B - C)n_0\dot{\varphi} + n_0^2(C - B)\psi = 0,$$
$$B\ddot{\varphi} + (A + B - C)n_0\dot{\psi} + 4n_0^2(C - A)\varphi = 0, \tag{2.10}$$
$$C\ddot{\theta} + 3n_0^2(B - A) = 0.$$

Ultima ecuaţie (2.10) se scrie sub forma :

$$\ddot{\theta} + p_\theta^2\,\theta = 0, \tag{2.11}$$

cu

$$p_\theta^2 = 3n_0^2\frac{B - A}{C}.$$

Se observă că pentru $B > A$, mişcarea este oscilatorie, perioada de oscilaţie fiind

$$T_\theta = \frac{2\pi}{p_\theta} = \frac{2\pi}{n_0}\sqrt{\frac{C}{3(B - A)}} \approx 0{,}57735\,T_0\sqrt{\frac{C}{B - A}} \tag{2.12}$$

unde T_0 este perioada mişcării vehiculului pe traiectorie.

Cu notaţiile :

$$\begin{aligned} K &= n_0(A + B - C), \\ K\psi &= n_0^2(C - B), \\ K\varphi &= 4n_0^2(C - A), \end{aligned} \tag{2.13}$$

primele două ecuaţii (2.10) se scriu :

$$\begin{aligned} A\ddot{\psi} - K\dot{\varphi} + K_\psi\psi &= 0, \\ B\ddot{\varphi} + K\dot{\psi} + K_\varphi\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dacă se neglijează termenii $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ se obţin mişcări decuplate cu perioadele :

$$\begin{aligned} T_\psi &= T_0 \sqrt{\frac{A}{C - B}}, \\ T_\varphi &= T_0 \sqrt{\frac{B}{4(C - A)}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pentru a obţine mişcări periodice cu perioadele date de (2.12), (2.15) trebuie să fie îndeplinite condiţiile :

$$C > B > A. \tag{2.16}$$

2.2. CAZUL TRAIECTORIILOR ELIPTICE. În cazul traiectoriilor eliptice nu mai sînt posibile toate simplificările făcute pentru orbite circulare.

Pentru traiectorii eliptice, legea orară se poate pune sub forma :

$$\dot{\nu} = \frac{1}{r_V} \sqrt{\frac{\mu}{p_V}} (1 + e \cos \nu), \tag{2.17}$$

de unde, prin derivare se obţine

$$\ddot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{p_V}} \left[-\frac{1}{r_V^2} \dot{r}_V(1 + e \cos\nu) + \frac{1}{r_V} e (-\sin \nu) \dot{\nu} \right]. \tag{2.18}$$

Folosind relaţiile

$$\dot{r}_V = V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p_V}} e \sin \nu, \tag{2.19}$$

$$r_V = \frac{p_V}{1 + e \cos \nu} \tag{2.20}$$

se obţine

$$\ddot{\nu} = -\frac{2\mu e \sin \nu}{r_V^3} \tag{2.21}$$

Din relaţiile (1.2) şi (1.6), cu aproximaţiile (2.2), (2.3) se obţin proiecţiile vitezei unghiulare pe axele sistemului legat de corp

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} - \dot{\nu}\varphi, \\ q &= \dot{\varphi} + \dot{\nu}\psi, \\ r &= \dot{\theta} + \dot{\nu} \end{aligned} \tag{2.22}$$

şi derivatele lor

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \ddot{\psi} - \dot{\nu}\dot{\varphi} - \ddot{\nu}\varphi, \\ \dot{q} &= \ddot{\varphi} + \dot{\nu}\dot{\psi} + \ddot{\nu}\psi, \\ \dot{r} &= \ddot{\theta} + \ddot{\nu}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Cu relaţiile de mai sus, ecuaţiile lui **Euler** (1.4) devin:

$$\begin{aligned} A(\ddot{\psi} - \dot{\nu}\dot{\varphi} - \ddot{\nu}\varphi) + (C - B)\,(\dot{\nu}\dot{\varphi} + \dot{\nu}^2\psi) &= \mathcal{M}_1, \\ B(\ddot{\varphi} + \dot{\nu}\dot{\psi} + \ddot{\nu}\psi) + (A - C)\,(\dot{\nu}\dot{\psi} - \dot{\nu}^2\varphi) &= \mathcal{M}_2, \\ C(\ddot{\theta} + \ddot{\nu}) &= \mathcal{M}_3. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pentru micile oscilaţii pe orbite eliptice se obţine, folosind (1.5), momentele gravitaţionale

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\approx 0, \\ \mathcal{M}_2 &\approx -3\dot{\nu}^2(C - A)\varphi, \\ \mathcal{M}_3 &\approx -3\dot{\nu}^2(B - A)\,\theta, \end{aligned} \tag{2.25}$$

cu care ecuaţiile de mişcare (2.24) se pun sub forma:

$$\begin{aligned} A\ddot{\psi} - (A + B - C)\,\dot{\nu}\dot{\varphi} + (C - B)\,\dot{\nu}^2\psi - A\ddot{\nu}\varphi &= 0, \\ B\ddot{\varphi} + (A + B - C)\,\dot{\nu}\dot{\psi} + 4(C - A)\,\dot{\nu}^2\varphi + B\ddot{\nu}\psi &= 0, \\ C\ddot{\theta} + 3\dot{\nu}^2(B - A)\theta &= -C\ddot{\nu} \end{aligned} \tag{2.26}$$

A treia ecuaţie (2.26) conţine numai unghiul θ.
Cu transformările

$$\dot{\nu} = \frac{1}{r_V}\sqrt{\frac{\mu}{p_V}}\,(1 + e\cos\nu) = \sqrt{\frac{\mu p_V}{r_V^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{p_V^3}}\,(1 + e\cos\nu)^2, \tag{2.27}$$

$$\ddot{\nu} = -\frac{2\mu\, e\sin\nu}{r_V^3} = -\frac{2\mu\, e\sin\nu}{p_V^3}(1+e\cos\nu)^3, \tag{2.28}$$

ecuaţia devine

$$C\ddot{\theta} + \frac{3\mu(B-A)}{p_V^3}(1+e\cos\nu)^4\,\theta = \frac{2\mu e\, C\sin\nu}{p_V^3}(1+e\cos\nu)^3 \tag{2.29}$$

Se înlocuieşte variabila independentă t (timp) cu ν,

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\nu}\dot{\nu}, \tag{2.30}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\nu^2}\dot{\nu}^2 + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\nu}\ddot{\nu}. \tag{2.31}$$

Înlocuind (2.28), (2.31) în (2.29) se obţine

$$(1+e\cos\nu)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\nu} + 3\frac{B-A}{C}\theta = 2e\sin\nu \tag{2.32}$$

Se pot transforma şi primele două ecuaţii (2.26), schimbînd variabila independentă t cu ν. Folosind (2.17), (2.18) putem scrie:

$$\dot{\psi} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu}\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{p_V^3}}(1+e\cos\nu)^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu}, \tag{2.33}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\nu^2}\dot{\nu}^2 + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu}\ddot{\nu} = \frac{\mu}{p_V^3}(1+e\cos\nu)^4\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\nu^2} - \frac{2\mu e\sin\nu}{p_V^3}(1+e\cos\nu)^3\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu}. \tag{2.34}$$

În acelaşi mod se calculează derivatele $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, înlocuind în (2.26), obţinem:

$$A(1+e\cos\nu)\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\nu^2} - 2Ae\sin\nu)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu} - (A+B-C)(1+e\cos\nu)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu} + (C-B)(1+e\cos\nu) + 2Ae\sin\nu\cdot\varphi = 0, \tag{2.35}$$

$$B(1+e\cos\nu)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\nu^2} - 2Be\sin\nu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu} + (A+B-C)(1-\cos\nu)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu} + 4(C-A)(1+e\cos\nu)\varphi - 2Be\sin\nu\cdot\psi = 0.$$

Primit în redacţie la 16 februarie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. BELEȚKII, *O librații sputnika*, Iskusstvennie sputniki Zemli, **3** (1959).
2. V. V. BELETSKY, *The libration of a satellite on an elliptic orbit*, *Dynamics of Satellites*, *IUTAM Symposium Paris*, **1962**, Editor Maurice Roy, Springer—Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963.
3. V. V. BELEȚKII, *Ocerki o dvijenii kosmiceskth tel.*, Moskva, 1977.
4. L. I. KARGU, *Sistemi uglovoi stabilizații kosmiceskth apparatov*, Moskva, 1973.
5. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*, Edit. Academiei, București, 1973.
6. M. M. NIȚĂ, I. STROE, *Asupra stabilității satelitului ecuatorial considerat solid rigid*, St. cerc. mec. apl., **47**, *5* (1988).
7. V. A. SARÎCEEV, V. V. SAZONOV, V. A. ZLATOISTOV, *Periodiceskie vraşceniia sputnika v plosknosti elliptkeskoi orbitt*, Kosmiceskie Issledovaniia, *2* (1971).
8. I. STROE, *Asupra mișcării plane a vehiculului spațial în prezența unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **44**, *5* (1985).
9. I. STROE, *Perturbațiile mișcării centrului de masă al vehiculului spațial, date de mișcarea în jurul centrului de masă*, St. cerc. mec. apl., **44**, *6* (1985).
10. I. STOE, *Influența distribuției de masă și a armoniciei gravitaționale J_2 asupra mișcării vehiculului spațial pe orbite ecuatoriale circulare*, St. cerc. mec. apl., **45**, *1* (1986).
11. I. STROE, *Integrale prime ale ecuațiilor mișcării vehiculului spațial în prezența unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **45**, *5* (1986).
12. T. YOSAKA, *The structural feasibility of a gravity stabilized antenna*, Acta Astronautica, *5—6* (1981).

ECUAȚIILE LUI LAGRANGE ÎN CAZUL MIȘCĂRII RELATIVE CU APLICARE LA ELASTO-DINAMICA MECANISMELOR CU BARE DEFORMABILE

de S. D. MUȘAT și A. DIMOFTE

Universitatea din Galați

În lucrare sînt stabilite ecuații de tip Lagrange în cazul mișcării relative a unui sistem material, prezentate în formă matriceală. Ecuațiile pot fi folosite în studiul mecanismelor cu elemente deformabile, deplasările punctelor rezultate din deformarea elementelor reprezentînd mișcarea relativă; elementele mecanismului prin deplasările lor de rigid realizează transportul. Pe linia folosirii metodei elementelor finite în studiul elasto-dinamic al mecanismelor, ecuațiile tip Lagrange sînt folosite pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării elastice a unui element finit de bară dintr-un mecanism spațial, în ipoteza micilor deplasări elastice.

1. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE ÎN CAZUL MIȘCĂRII RELATIVE

Fie un sistem de puncte materiale A_k de mase m_k, $k = 1, \ldots, n$, aflat în mișcare sub acțiunea forțelor active $\bar{F}_k$ și eventuale forțe de legătură, $\bar{R}_k$, din legăturile (Γ_k); legăturile sînt presupuse ideale (fig. 1). Se consideră cunoscută mișcarea reperului $T(O, x, y, z)$ în raport cu reperul fix $T_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$; se urmărește determinarea mișcării sistemului material în raport cu reperul T (mișcarea relativă) sub acțiunea forțelor $\bar{F}_k$.

Fie δ_s, $s = 1, \ldots, h$, un sistem de coordonate generalizate precizînd poziția sistemului material în raport cu reperul T și fie $\{\delta\}$ un vector cuprinzînd aceste coordonate. Vectorul de poziție al punctului A_k se poate exprima:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(\delta_1, \ldots, \delta_h) = \bar{r}_k^0(x_k, y_k, z_k) + \\ + \bar{\Delta}_k(\delta_1, \ldots, \delta_h), \quad k = 1, \ldots, n, \quad (1)$$

unde $\bar{r}_k^0$, $k = 1, \ldots, n$ definesc poziția punctelor sistemului material în raport cu configurația sistemului corespunzătoare absenței forțelor $\bar{F}_k$ și mișcării reperului; $\bar{\Delta}_k(\delta_1, \ldots, \delta_h)$ definește deplasarea punctului A_k în raport cu reperul mobil T. Fie $\{\Delta_k\} = \{\Delta_{kx}, \Delta_{ky}, \Delta_{kz}\}^T$ forma matriceală a vectorului $\bar{\Delta}_k$; legătura acestuia cu coordonatele generalizate se poate exprima:

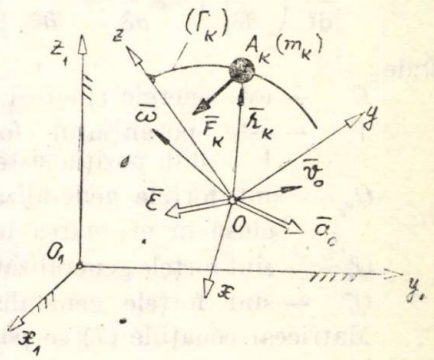


Fig. 1

$$\{\Delta_k\}_{3\times 1} = [\alpha_k(x_k, y_k, z_k])_{3\times h} \{\delta\}_{h\times 1}, \quad (2)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 2, 1992, P. 129—140

unde $[\alpha_k]$ este o matrice de legătură între coordonatele carteziene ale punctului A_k în reperul T și coordonatele generalizate δ_h.

Derivata locală a vectorului $\bar{r}_k$ va fi:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial t} = \dot{\bar{\Delta}}_k \quad \text{(notație)}. \tag{3}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii în cazul mișcării relative pentru fiecare din punctele sistemului material se va scrie:

$$m_k \bar{a}_k^r = \bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{F}_k^t + \bar{F}_k^c, \; k = 1, \ldots, n \tag{4}$$

în care:

$\bar{F}_k$ — rezultanta forțelor active aplicate punctului A_k;

$\bar{R}_k$ — rezultanta reacțiunilor din legăturile aplicate punctului A_k,

$$\bar{F}_k^t = - m_k \bar{a}_k^t = - m_k [\bar{a}_0, + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_k + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)], \tag{5}$$

$$\bar{F}_k^c = - m_k \bar{a}_k^c = - 2 m_k \bar{\omega} \times \dot{\bar{\Delta}}_k. \tag{6}$$

reprezintă respectiv forța complementară de transport și forța complementară Coriolis aferente punctului A_k.

Ecuațiile lui Lagrange aplicate de un observator situat în reperul mobil se vor scrie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}_s}\right) - \frac{\partial E}{\partial \delta_s} + \frac{\partial V}{\partial \delta_s} = Q_{os} + Q_s^t + Q_s^c \quad s = 1, \ldots, h, \tag{7}$$

unde:

E — este energia cinetică a sistemului în mișcarea relativă;

V — este potențialul forțelor $\bar{F}_k$ conservative; se consideră $V = 0$ în poziția sistemului definită de $\bar{r}_k = \bar{r}_k^0$, $k = 1, \ldots, n$;

Q_{0_s} — sînt forțele generalizate corespunzătoare forțelor F_k neincluse în evaluarea lui V;

Q_s^t — sînt forțele generalizate corespunzătoare forțelor de transport;

Q_s^c — sînt forțele generalizate corespunzătoare forțelor Coriolis.

Matriceal ecuațiile (7) se pot scrie condensat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \{\dot{\delta}\}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \{\delta\}} + \frac{\partial V}{\partial \{\delta\}} = \{Q_0\} + \{Q^t\} + \{Q^c\} \tag{8}$$

Energia cinetică în mișcarea relativă a sistemului este

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (\dot{\bar{\Delta}}_k)^2. \tag{9}$$

În baza relației (2) se poate scrie

$$\{\dot{\Delta}_k\} = [\alpha_k]\,\{\dot{\delta}\} \tag{10}$$

cu care (9) devine

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\{\dot{\Delta}_k\}^T\{\dot{\Delta}_k\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\{\dot{\delta}\}^T[\alpha_k]^T[\alpha_k]\,\{\dot{\delta}\}$$

sau

$$E = \frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T[M]\,\{\dot{\delta}\} \tag{11}$$

cu

$$[M] = \sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k]^T[\alpha_k] \text{ (simetrică)} \tag{12}$$

reprezentînd *matricea maselor.*

Potențialul V al sistemului interesează în mod deosebit ca potențial al forțelor interioare elastice (energie potențială de deformație) situație în care se scrie în forma:

$$V = \frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]\,\{\delta\} \tag{13}$$

unde $[K]$ este *matricea de rigiditate.*

Forțele generalizate corespunzătoare forțelor $\bar{F}_k$ neincluse în V se vor exprima:

$$\{Q_0\} = \sum_k \bar{F}_k\frac{\partial\bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}} = \sum_k \frac{\partial\{\Delta_k\}^T}{\partial\{\delta\}}\{F_k\} = \sum_k [\alpha_k]^T\{F_k\}. \tag{14}$$

Se introduc notațiile:

$$\{r_k^0\} = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}; \quad [r_k^0] = \begin{bmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y & x_k & 0 \end{bmatrix}; \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_k \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix};$$

$$[\omega] = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_l & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Forțele generalizate corespunzătoare forțelor de transport se vor scrie:

$$Q^t\} = -\sum_{k=1}^{n} m_k\bar{a}_k^t\frac{\partial\bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}} = -\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{\partial\bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\ \bar{r}_k + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)] =$$

$$= \underbrace{-\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{a}_k^t \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\right)\bar{a}_0}_{{}^1\{Q^t\}} \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_k)}_{{}^2\{Q^t\}} \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)}_{{}^3\{Q^t\}}.$$

Termenii se transformă astfel :

$${}^1\{Q^t\} = -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\right)\bar{a}_0 = -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\Delta_k\}^T}{\partial\{\delta\}}\right)\{a_0\}$$

sau

$$\{Q_1\} \equiv {}^1\{Q^t\} = -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k [\alpha_k]^T\right)\{a_0\}\,; \tag{15}$$

$${}^2\{Q^t\} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_k) = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_k^0) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}(\bar{\varepsilon}\times\bar{\Delta}_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\delta\}^T}{\partial\{\delta\}}[\alpha_k]^T[r_k^0]\right)\{\varepsilon\} -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\delta\}^T}{\partial\{\delta\}}[\alpha_k]^T[\varepsilon][\alpha_k]\right)\{\delta\}$$

sau

$${}^2\{Q^t\} = \{Q_2\} - [K']\{\delta\}, \tag{16}$$

unde :

$$\{Q_2\} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k]^T[r_k^0]\right)\{\varepsilon\}, \tag{17}$$

$$[K'] = \sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k][\varepsilon][\alpha_k] \qquad \text{(antisimetrică)}\,; \tag{18}$$

$${}^3\{Q^t\} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times r_k^0) - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\Delta_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\delta\}^T}{\partial\{\delta\}}[\alpha_k]^T[\omega]^2\{r_k^0\} - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\delta\}^T}{\partial\{\delta\}}[\alpha_k]^T[\omega]^2[\alpha_k]\right)\{\delta\}$$

sau

$$^{3}\{Q^{t}\} = \{Q_3\} - [K'']\{\delta\} \tag{19}$$

unde

$$\{Q_3\} = -\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k][\omega]^2\{r_k^0\}, \tag{20}$$

$$[k''] = \sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k]^T[\omega]^2[\alpha_k] \text{ (simetrică).} \tag{21}$$

Forţele generalizate corespunzătoare forţelor Coriolis se vor scrie:

$$\{Q\} = -2\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\overline{\Delta}_k}{\partial\{\delta\}}(\bar{\omega} \times \dot{\overline{\Delta}}_k) = -2\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial\{\delta\}^T}{\partial\{\delta\}}[\alpha_k]^T[\omega][\alpha_k]\{\dot{\delta}\}$$

sau

$$\{Q^c\} = -[C]\{\dot{\delta}\} \tag{22}$$

cu

$$[C] = 2\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha_k]^T[\omega][\alpha_k] \quad \text{(antisimetrică).} \tag{23}$$

Ecuaţiile (8) se vor scrie:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + ([K]) + [K'] + [K'']\{\delta\} = \{Q_0\} + \{Q_1\} + \{Q_2\} + \{Q_3\} \tag{24}$$

cu $[M]$, $[C]$, $[K']$,$[K'']$ date respectiv de relaţiile (12), (23), (18), (21) şi $\{Q_0\}$, $\{Q_1\}$ $\{\theta_2\}$, $\{Q_3\}$ date respectiv de (14), (15), (17), (20); matricea $[K]$ se stabileşte concret de la caz la caz după procedeele cunoscute.

★

În cazul în care sistemul de puncte materiale reprezintă un continuum material deformabil, matricele $[\alpha_k(x_k, y_k, z_k)]$ devin funcţii de coordonatele punctului curent, $[\alpha(x, y, z)]$. Sumele din relaţiile de mai sus devin integrale extinse pe domeniul ocupat de continuumul material (în satre nedeformată). Dacă continuumul material este divizat în elemente finite, vectorul $\{\delta\}$ va cuprinde deplasările nodale iar matricea $[\alpha]$ va fi matricea funcţiilor de interpolare; ecuaţiile (24) vor reprezenta ecuaţiile de mişcare ale elementului finit care asamblate duc la obţinerea ecuaţiilor elasto-dinamice ale întregului sistem material. Ecuaţiile stabilite mai sus pot fi astfel utilizate pentru studiul mişcării elastice a sistemelor mecanice (mecanisme) cu elemente suple lucrînd la viteze mari, pentru studiul comportării dinamice a palelor de elice, etc.

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII ELASTICE PENTRU UN ELEMENT EINIT DE BARĂ

Fie un element finit de bară (fig. 2) aparținînd unui mecanism spațial a cărui mișcare rigidă se consideră cunoscută, rezultată din integrarea ecuației de mișcare a mecanismului cu elementele (bare) considerate rigide, mișcare peste care se suprapune „mișcarea elastică" a elementelor mecanismului, considerate deformabile (liniar elastic). Fie $\{\delta\}$ vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit cu rol de coordonate generalizate,

$$\{\delta\} = \langle \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{11}, \delta_{12} \rangle^T.$$

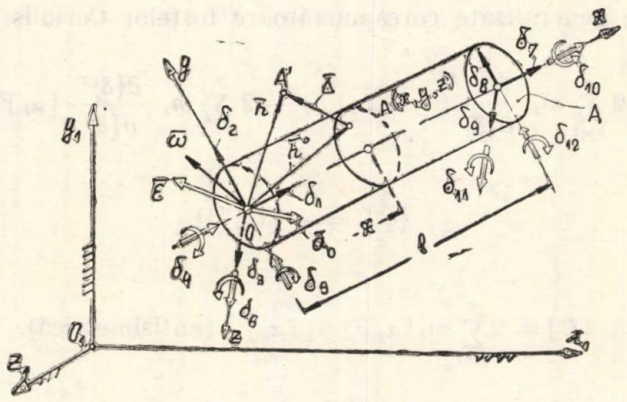


Fig. 2

Vectorul $\{\Delta\} = \langle \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \rangle$ care măsoară deplasarea elastică a punctului $A(x, y, z)$ al barei, folosind funcțiile de interpolare utilizate curent, se va scrie

$$\{\Delta\} = [\alpha]\{\delta\},$$

unde:

$$[\alpha = \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 \rangle \\ \langle \alpha_2 \rangle \\ \langle \alpha_3 \rangle \end{bmatrix},$$

cu:

$$\langle \alpha_1 \rangle = \langle (1-\xi) \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid \xi \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid \rangle,$$

$$\langle \alpha_2 \rangle = \langle 0 \mid (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \mid 0 \mid -z(1-\xi) \mid 0 \mid l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \mid$$

$$\mid 0 \mid (3\xi^2 - 2\xi^3) \mid 0 \mid -z\xi \mid 0 \mid l(\xi^3 - \xi^2) \rangle,$$

$$\langle \alpha_3 \rangle = \langle \mid 0 \mid 0 \mid (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \mid y(1-\xi) \mid l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \mid$$

$$\mid 0 \mid 0 \mid (3\xi^2 - 2\xi^3) \mid y\xi \mid l(-\xi^3 + \xi^2) \mid 0 \rangle,$$

în care $\xi = x/l$. S-au avut în vedere relaţiile :

$$\Delta_x = u,$$

$$\Delta_y = v - z\,\varphi_x,$$

$$\Delta_z = w + y\varphi_x,$$

cu interpolări liniare pentru funcţiile u şi φ_x şi polinoame de interpolare de gradul trei (l'Hérmite) pentru funcţiile v şi w.

Matricele şi vectorii care intervin în ecuaţiile diferenţiale ale mişcării elastice a elementului finit, pe baza celor stabilite mai sus, vor fi :

— matricea de inerţie $[M]$,

$$[M] = \sum_k m_k [\alpha_k]^T [\alpha_k] = \rho \int_{(V)} [\alpha]^T [\alpha]\, dV,$$

unde ρ este densitatea materialului, (V) — volumul elementului finit; se obţine prin integrare matricea de inerţie pentru acest tip de element (v. de ex. [1]);

— matricea $[K]$ va fi matricea de rigiditate a elementului finit corespunzătoare sistemului de coordonate generalizate şi interpolărilor admise (v. de ex. [1]);

— matricea $[C]$, pentru care se scrie

$$[C] = 2 \sum_k m_k [\alpha_k]^T [\omega] [\alpha_k] = 2\rho \int_{(V)} [\alpha]^T [\omega] [\alpha]\, dv = \rho A l\ [c]$$

cu $[C]$ matrice antisimetrică, cu toate elementele diagonalei principale nule şi cu următoarele elemente nenule deasupra acesteia :

$$c_{1,2} = -\frac{7}{10}\omega_z,\ c_{1,3} = \frac{7}{10}\omega_y,\ c_{1,5} = -\frac{1}{10} l\omega_y,\ c_{1,6} = -\frac{1}{10} l\omega_z,\ c_{1,8} = -\frac{3}{10}\omega_z,$$

$$c_{1,9} = \frac{3}{10}\omega_y,\ c_{1,11} = \frac{1}{15} l\omega_y,\ c_{1,12} = \frac{1}{15} l\omega_z,$$

$$c_{2,3} = -\frac{26}{35}\omega_z,\ c_{2,5} = \frac{11}{105} l\omega_x,$$

$$c_{2,7} = \frac{3}{10}\omega_z,\ c_{2,9} = -\frac{9}{35}\omega_x,\ c_{2,11} = -\frac{13}{210} l\omega_x,$$

$$c_{3,6} = \frac{11}{105} l\omega_x,\ c_{3,6} = -\frac{3}{10} l\omega_y,$$

$$c_{3,8} = \frac{9}{35}\omega_x,\ c_{3,12} = -\frac{13}{210}l\omega_x,\ c_{5,6} = -\frac{2}{105}l^2\omega_x,$$

$$c_{5,7} = \frac{1}{15}l\omega_y,\ c_{5,8} = -\frac{13}{210}l\omega_x,$$

$$c_{5,12} = \frac{1}{70}l^2\omega_x,\ c_{6,7} = \frac{1}{15}l\omega_z,\ c_{6,9} = -\frac{13}{210}l\omega_x,\ c_{6,11} = -\frac{1}{70}l^2\omega_x,$$

$$c_{7,8} = -\frac{7}{10}\omega_z,\ c_{7,9} = \frac{7}{10}\omega_y,\ c_{7,11} = \frac{1}{10}l\omega_y,\ c_{7,12} = \frac{1}{10}l\omega_z,$$

$$c_{8,9} = -\frac{26}{35}\omega_x,\ c_{8,11} = -\frac{11}{105}l\omega_x,\ c_{9,12} = -\frac{11}{105}l\omega_x,$$

$$c_{11,12} = -\frac{2}{105}l^2\omega_x;$$

— matricea $[K']$, pentru care se scrie

$$[K'] = \sum_k m_k[\alpha_k]^T[\varepsilon][\alpha_k] = \rho\int_{(V)}[\alpha]^T[\varepsilon][\alpha]\,dv = \rho Al[k']$$

cu $[k']$ matrice antisimetrică, cu toate elementele diagonalei principale nule și cu următoarele elemente nenule deasupra acesteia :

$$k'_{1,2} = -\frac{7}{20}\varepsilon_z,\ k'_{1,3} = \frac{7}{20}\varepsilon_y,\ k'_{1,5} = -\frac{1}{20}l\varepsilon_y,$$

$$k'_{1,6} = -\frac{1}{20}l\varepsilon_z,\ k'_{1,8} = -\frac{3}{20}\varepsilon_z,$$

$$k'_{1,9} = \frac{3}{20}\varepsilon_y,\ k'_{1,11} = \frac{1}{30}l\varepsilon_y,\ k'_{1,12} = \frac{1}{30}l\varepsilon_z,,$$

$$k'_{2,3} = -\frac{13}{35}\varepsilon_x,\ k'_{2,5} = \frac{11}{210}l\varepsilon_x,$$

$$k'_{2,7} = \frac{3}{20}\varepsilon_z,\ k'_{2,9} = -\frac{9}{70}\varepsilon_x,\ k'_{2,11} = -\frac{13}{420}l\varepsilon_x,$$

$$k'_{3,6} = \frac{11}{210}l\varepsilon_x,\ k'_{3,7} = -\frac{3}{20}\varepsilon_y,$$

$$k'_{3,8} = \frac{9}{70}\varepsilon_x,\ k'_{3,12} = -\frac{13}{420}l\varepsilon_x,\ k'_{5,6} = -\frac{1}{105}l^2\varepsilon_x,$$

$$k'_{5,7} = \frac{1}{30}l\varepsilon_y,\ k'_{5,8} = -\frac{13}{420}l\varepsilon_x,$$

$$k'_{5,12} = \frac{1}{140}l^2\varepsilon_x,\ k'_{6,7} = \frac{1}{30}l\varepsilon_z,\ k'_{6,9} = -\frac{13}{420}l\varepsilon_x,$$

$$k'_{6.11} = -\frac{1}{140}l^2\varepsilon_x,\ k'_{7,8} = -\frac{7}{20}\varepsilon_z,$$

$$k'_{7,9} = \frac{7}{20}\varepsilon_y,\ k'_{7,11} = \frac{1}{20}l\varepsilon_y, k'_{7,22} = \frac{1}{20}l\varepsilon_z,$$

$$k'_{8,9} = -\frac{13}{35}\varepsilon_x,\ k'_{8,11} = -\frac{11}{210}l\varepsilon_x,$$

$$k'_{9,12} = -\frac{11}{210}l\varepsilon_x,\ k'_{11,12} = -\frac{1}{105}l^2\varepsilon_x;$$

— matricea $[K'']$, pentru care se scrie:

$$[K''] = \sum m_k[\alpha_k]^T[\omega]^2[\alpha_k] = \rho\int_{(V)}[\alpha]^T[\varepsilon][\alpha]\,dv = \rho Al\,[k'']$$

cu $[k'']$ matrice simetrică avînd următoarele elemente nenule în jumătatea superioară:

$$k''_{1,1} = -\frac{1}{3}(\omega_y^2 + \omega_z^1),\ k''^{7}_{1,2} = \frac{7}{20}\omega_x\omega_y,\ k''_{1,3} = \frac{7}{20}\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{1,5} = -\frac{1}{20}l\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{1,6} = \frac{1}{20}l\omega_x\omega_y,\ k''_{1,7} = -\frac{1}{6}(\omega_y^2 + \omega_z^2),\ k''_{1,8} = \frac{3}{20}\omega_x\omega_y,$$

$$k''_{1,9} = \frac{3}{20}\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{1,11} = \frac{1}{30}l\omega_x\omega_z,\ k''_{1,12} = -\frac{1}{30}l\omega_x\omega_y,\ k''_{2,2} = -\frac{13}{35}(\omega_x^2 + \omega_z^2),$$

$$k''^{3}_{2,3} = -\frac{13}{35}\omega_y\omega_z,$$

$$k''_{2,5} = -\frac{11}{210}l\omega_y\omega_z,\ k''_{2,6} = -\frac{11}{210}l(\omega_x^2+\omega_z^2),\ k''_{2,7} = \frac{3}{20}\omega_x\omega_y,$$

$$k''_{2,8} = -\frac{9}{70}(\omega_x^2+\omega_z^2),$$

$$k''_{2,9} = \frac{9}{70}\omega_y\omega_z,\ k''_{2,11} = \frac{13}{420}l\omega_y\omega_z,\ k''_{2,12} = \frac{13}{420}l(\omega_x^2+\omega_z^2),$$

$$k''_{3,3} = -\frac{13}{35}(\omega_x^2+\omega_y^2),\ k''_{3,5} = \frac{11}{210}l(\omega_x^2+\omega_y^2),\ k''_{3,6} = \frac{11}{210}l\omega_y\omega_z,$$

$$k''_{3,7} = \frac{3}{20}\omega_x\omega_z,\ k''_{3,8} = \frac{9}{70}\omega_y\omega_z,\ k''_{3,9} = -\frac{9}{70}(\omega_x^2+\omega_y^2),$$

$$k''_{3,11} = -\frac{13}{420}l(\omega_x^2+\omega_y^2),\ k''_{3,12} = -\frac{13}{420}l\omega_y\omega_z,$$

$$k''_{4,4} = -\frac{1}{3A}(I_x\omega_x^2+I_z\omega_y^2+I_y\omega_z^2),\ k''_{4,10} = -\frac{1}{6A}(I_x\omega_x^2+I_z\omega_y^2+I_y\omega_z^2),$$

$$k''_{5,5} = -\frac{1}{105}l^2(\omega_x^2+\omega_y^2),\ k''_{5,6} = -\frac{1}{105}l^2\omega_y\omega_z,\ k''_{5,7} = -\frac{1}{30}l\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{5,8} = -\frac{13}{240}l\omega_y\omega_z,\ k''_{5,9} = \frac{13}{420}l(\omega_x^2+\omega_y^2),\ k''_{5,11} = \frac{1}{140}l^2(\omega_x^2+\omega_y^2),$$

$$k''_{5,12} = \frac{1}{140}l^2\omega_y\omega_z,\ k''_{6,6} = -\frac{1}{150}l^2(\omega_x^2+\omega_z^2),\ k''_{6,7} = \frac{1}{30}l\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{6,8} = -\frac{13}{420}l(\omega_x^2+\omega_z^2),\ k''_{6,9} = \frac{13}{420}l\omega_y\omega_z,$$

$$k''_{6,11} = \frac{1}{140}l^2\omega_y\omega_z,\ k''_{6,12} = \frac{1}{140}l^2(\omega_x^2+\omega_z^2),$$

$$k''_{7,7} = -\frac{1}{3}(\omega_y^2+\omega_z^2),\ k''_{7,8} = \frac{7}{20}\omega_x\omega_y,\ k''_{7,9} = \frac{7}{20}\omega_x\omega_z,\ k''_{7,11} = \frac{1}{20}l\omega_x\omega_z,$$

$$k''_{7,12} = -\frac{1}{20} l\omega_x\omega_y,\quad k''_{8,8} = -\frac{13}{35}(\omega_x^2 + \omega_z^2),$$

$$k''_{8,9} = \frac{13}{35}\omega_y\omega_z,\quad k''_{8,11} = \frac{11}{210} l\omega_y\omega_z,$$

$$k''_{8,12} = \frac{11}{210} l(\omega_x^2 + \omega_z^2),\quad k''_{9,9} = -\frac{13}{35}(\omega_x^2 + \omega_y^2),\quad k''_{9,11} = -\frac{11}{210} l(\omega_x^2 + \omega_y^2),$$

$$k''_{9,12} = -\frac{11}{210}\omega_y\omega_z,\quad k''_{10,10} = -\frac{1}{3A}(I_x\omega_x^2 + I_z\omega_y^2 + I_y\omega_z^2),$$

$$k''_{11,11} = -\frac{1}{105} l^2(\omega_x^2 + \omega_y^2),$$

$$k''_{11,12} = -\frac{1}{105} l^2\omega_y\omega_z,\quad lk''_{12,12} = -\frac{1}{105} l^2(\omega_x^2 + \omega_z^2);$$

— vectorul $\{Q_0\}$, care în contextul metodei elementelor finite, reprezintă vectorul forțelor aplicate reduse la nodurile elementului finit;

— vectorul $\{Q_1\}$, care se scrie:

$$\{Q_1\} = -\left(\sum_k m_k[\alpha_k]^T\right)\{a_0\} = -\left(\rho\int_{(v)}[\alpha]^T\,dv\right)\{a_0\},$$

rezultînd după integrare

$$\{Q_1\} = \frac{\rho Al}{2}\left\langle -a_{0x};\ -a_{0y};\ -a_{0z};\ 0;\ \frac{1}{6}la_{0z};\ -\frac{1}{6}la_{0y};\right.$$

$$\left. -a_{0x};\ -a_{0y};\ -a_{0z};\ 0;\ -\frac{1}{6}la_{0z};\ -\frac{1}{6}la_{0y}\right\rangle^T;$$

— vectorul $\{Q_2\}$, care se scrie

$$\{Q_2\} = \left(\sum_k m_k[\alpha_k]^T[r_x^0]\right)\{\varepsilon\} = \left(\rho\int_{(v)}[\alpha]^T[r^0]\,dv\right)\{\varepsilon\};$$

rezultînd după integrare

$$\{Q_2\} = \rho Al\left\langle 0;\ -\frac{3}{20}l\varepsilon_z;\ \frac{3}{20}l\varepsilon_z;\ \frac{7}{20}l\varepsilon_y;\ -\frac{1}{2}\frac{I_y + I_z}{A}\varepsilon_x;\ -\frac{1}{30}l^2\varepsilon_y;\right.$$

$$-\frac{1}{30}l^2\varepsilon_z;\ 0;\ -\frac{7}{20}l\varepsilon_z;\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{I_y + I_z}{A}\varepsilon_x;$$

$$\left.\frac{1}{20}l^2\varepsilon_y;\ \frac{1}{20}l^2\varepsilon_z\right\rangle^T;$$

— vectorul $\{Q_3\}$, care se scrie:

$$\{Q_3\} = -\sum_k m_k[\alpha_k]^T[\omega]^2\{r_k^0\} = -\rho\int_{(v)}[\alpha]^T[\omega]^2\{r^0\}\,dv,$$

rezultînd după integrare

$$\{Q_3\} = \rho Al\left\langle \frac{1}{6}l(\omega_y^2+\omega_z^2);\ -\frac{3}{20}l\omega_x\omega_y;\ -\frac{3}{20}l\omega_x\omega_z;\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{I_y-I_z}{A}\omega_y\omega_z;\ \frac{1}{30}l^2\omega_x\omega_z;\ -\frac{1}{30}l^2\omega_x\omega_y;$$

$$\frac{1}{3}l(\omega_y^2+\omega_z^2);\ -\frac{7}{20}l\omega_x\omega_y;\ -\frac{7}{20}l\omega_x\omega_z;$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{I_y-I_z}{A}\omega_y\omega_z;\ -\frac{1}{20}l^2\omega_x\omega_z;\ \frac{1}{20}l^2\omega_x\omega_y\right\rangle^T.$$

★

Ecuațiile de mișcare ale elementelor finite se asamblează pentru toate elementele rezultate din discretizarea barelor mecanismului, obținîndu-se ecuațiile diferențiale ale mișcării elastice pentru întregul mecanism. Integrarea se face pas cu pas, putînd fi folosită aceeași divizare a timpului care a servit la rezolvarea mișcării rigide a mecanismului.

Primit în redacție la 30 noiembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. CH. MASSONET ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, București.
2. P. NATH, A. GHOSH, *Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms by Finite Element Method*, Mechanism and Machine Theory, **15**, *3* (1980).
3. V. VÎLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, București, 1963.

STUDIUL MICILOR DEFORMAȚII ALE UNUI CORP VÎSCOELASTIC AFLAT ÎN MIȘCARE DE ROTOTRANSLAȚIE FINITĂ

de V. NICOLAE și VETURIA CHIROIU

Institutul de mecanica solidelor, București

În lucrare se studiază deformația unui corp viscoelastic aflat în mișcare de rototranslație finită.
Problema la limită este analizată din punctul de vedere al formalismului galerkian.

1. CINEMATICA MIȘCĂRII CORPULUI

Considerăm un corp deformabil de masă m, și volum V, raportat la un sistem de coordonate materiale $O\xi_1\xi_2\xi_3$ și ne propunem să descriem mișcarea acestui corp în raport cu un sistem de coordonate spațiale $O_1x_1x_2x_3$ considerat fix. Centrul de greutate G și tensorul moment de inerție J ale corpului sînt definite de

$$\xi_G = \frac{1}{m}\int_V \xi\, \rho \mathrm{d}V$$

$$\mathbf{J} = \int_V [\langle \xi, \xi\rangle \mathbf{I} - \xi \otimes \xi]\, \rho \mathrm{d}V \tag{1.1}$$

unde ξ_G, ξ sînt vectorii de poziție al centrului de greutate și respectiv al unui punct curent, ρ densitatea de masă, iar prin $\langle \xi, \xi \rangle$ și $\xi \otimes \xi$ s-au notat produsul scalar și respectiv produsul diadic al vectorilor.

Introducem un sistem de coordonate carteziene $Oz_1z_2z_3$ care urmărește mișcarea de rigid a corpului. Poziția originii 0 și direcția axelor este dată de vectorul de poziție $\mathbf{x}_0(t)$ și de tensorul ortogonal $\mathbf{Q}(t)$.

Fie o descriere a mișcării corpului de forma

$$\mathbf{x}(\xi, t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t)\ \mathbf{z}(t); \qquad \mathbf{z}(t) = \xi + \mathbf{u}(\xi, t) \tag{1.2}$$

unde $\mathbf{x}_0(t)$ descrie deplasarea originii reperului mobil în raport cu cel fix, $\mathbf{Q}(t)$ este un tensor ortogonal $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = 1$ care descrie rotația reperului mobil în raport cu cel fix iar $\mathbf{u}(\xi, t)$ este deplasarea particulei ξ.

Să observăm că în această descriere, mișcarea particulei M se poate descompune într-o mișcare de rigid a întregului corp desemnată de $\mathbf{x}_0(t)$ și $\mathbf{Q}(t)$ peste care se suprapune o deformație dată de $\mathbf{u}(\xi, t)$ față de o poziție a corpului deplasat ca un rigid (fig. 1).

Avînd în vedere că $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{Q}(t)$ și $\mathbf{u}(\xi, t)$ sînt necunoscute, raportarea poziției deformate a corpului la reperul $Oz_1z_2z_3$ nu este unică.

Pentru a obține restricțiile necesare pentru ca reprezentarea (1.2) să fie unică, considerăm o descriere arbitrară a mișcării corpului dată de

$$\mathbf{x}(\xi, t) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}^*(t)\,[\xi + \mathbf{u}^*(\xi, t)] \tag{1.3}$$

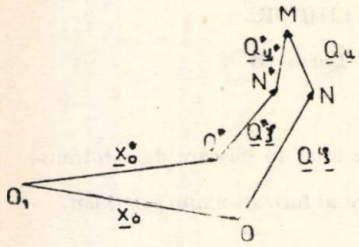


Fig. 1

Fie în acest caz

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{u}^*\rho\,dV$$

$$\beta = \frac{1}{2m}\int_V \operatorname{rot}\,\mathbf{u}^*\rho\,dV$$

deplasarea și rotația medie a corpului în raport cu reperul mobil.

Introducînd

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^* - \mathbf{Q}^*\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0 - \beta \times \xi \tag{1.4}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*\mathbf{B},\quad \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 1$$

unde

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.5}$$

este tensorul ortogonal care corespunde rotației infinitezimale dată de β; se obțin condițiile necesare pentru unicitatea reprezentării (1.2)

$$\int_V \mathbf{u}\rho\,dV = 0, \qquad \int_V (\operatorname{rot}\,\mathbf{u})\,\rho dV = 0 \tag{1.6}$$

Derivînd relația (1.2) obținem viteza punctului material M sub forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\Omega}\mathbf{Q}(\xi + \mathbf{u}) + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}} \tag{1.7}$$

unde tensorul antisimetric

$$\tilde{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\tilde{\Omega}^T \tag{1.8}$$

corespunde vectorului rotație ω prin relația

$$\tilde{\Omega}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{v}} \tag{1.9}$$

Mărimile vectoriale și tensoriale raportate la reperul fix au fost notate cu tildă în timp ce aceleași mărimi raportate la reperul mobil sînt notate cu același simbol, fără tildă.

De exemplu un vector $\tilde{\mathbf{v}}$ raportat la reperul fix devine

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\tilde{\mathbf{v}} \tag{1.10}$$

în reperul mobil. De asemenea, un tensor $\tilde{\mathbf{A}}$ faţă de reperul fix devine în reperul mobil

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q} \tag{1.11}$$

Vectorului rotaţie $\tilde{\omega}$ îi corespunde în reperul mobil vectorul rotaţiei

$$\omega = \mathbf{Q}^T\tilde{\omega}. \tag{1.12}$$

Acesta provine din tensorul antisimetric

$$\Omega = \mathbf{Q}^T\dot{\tilde{\Omega}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} \tag{1.13}$$

Derivata unui vector $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}\mathbf{v}$ este dată de relaţia

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{v}} + \omega \times \mathbf{v}) \tag{1.14}$$

În cele ce urmează vom folosi următoarea teoremă.

Teoremă. *Fie A un tensor antisimetric şi $\mathbf{a}$ vectorul corespunzător lui. Dacă R este un tensor ortogonal, atunci tensorul $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{RAR}^T$ este antisimetric şi îi corespunde vectorul $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{Ra}$.*

Demonstraţie. Este evident că tensorul $\tilde{\mathbf{A}}$ este antisimetric. Avem

$$\mathbf{Av} = \mathbf{RAR}^T\mathbf{v} = \mathbf{R}[\mathbf{a} \times \mathbf{R}^T\mathbf{v}] = \mathbf{Ra} \times \mathbf{RR}^T\mathbf{v} =$$

$$= \mathbf{Ra} \times \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{v}.$$

Ţinînd seama de (1.8) — (1.13), relaţia (1.7) devine

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\omega} \times \mathbf{Q}(\xi + \mathbf{u}) + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}} = \tag{1.15}$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{Q}[\omega \times (\xi + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]$$

În cele ce urmează vom da o formulă generală de reprezentare a unui tensor ortogonal ca un produs de trei tensori ortogonali elementari ce definesc rotaţiile în jurul a trei axe.

Definim următorii tensori ortogonali elementari

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

$$\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cu ajutorul acestor tensori construim tensorii antisimetrici

$$\dot{\mathbf{R}}_k(\alpha)\mathbf{R}_k^T(\alpha) = \mathbf{R}_k^T(\alpha)\,\dot{\mathbf{R}}_k(\alpha) \tag{1.17}$$

cărora le corespund vitezele unghiulare $\dot{\alpha}\mathbf{i}_k$, unde $\mathbf{i}_k$ este versorul ariei de rotație.

Fie o tripletă de indici $\{\lambda, \mu, \nu\}$ cuprinși între 1 și 3 astfel încît $\lambda \neq \mu$ și $\mu \neq \nu$. Atunci pentru orice tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ cu $\det \mathbf{Q} = 1$, există trei unghiuri α_1, α_2, α_3 unic determinate, $\alpha_1, \alpha_3 \in [0, 2\pi)$, $\alpha_2 \in [0, \pi)$ astfel încît

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_\nu(\alpha_3)\,\mathbf{R}_\mu(\alpha_2)\,\mathbf{R}_\lambda(\alpha_1) \tag{1.18}$$

Demonstrația este analoagă celei utilizate, în cazul unghiurilor lui Euler.

Vectorii rotației $\tilde{\omega}$ și ω, corespunzători tensorului ortogonal $\mathbf{Q}$ dat de (1.18) se calculează după cum urmează

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T &= \dot{\mathbf{R}}_\nu\mathbf{R}_\nu^T + \mathbf{R}_\nu\dot{\mathbf{R}}_\mu\mathbf{R}_\mu^T\mathbf{R}_\nu^T + \mathbf{R}_\nu\mathbf{R}_\mu\dot{\mathbf{R}}_\lambda\mathbf{R}_\lambda^T\mathbf{R}_\mu^T\mathbf{R}_\lambda^T \\ \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{R}_\lambda^T\dot{\mathbf{R}}_\lambda + \mathbf{R}_\lambda^T\mathbf{R}_\mu^T\dot{\mathbf{R}}_\mu\mathbf{R}_\lambda + \mathbf{R}_\lambda^T\mathbf{R}_\mu^T\mathbf{R}_\nu^T\dot{\mathbf{R}}_\nu\mathbf{R}_\mu\mathbf{R}_\lambda \end{aligned} \tag{1.19}$$

Pe baza teoremei enunțate mai sus rezultă

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \dot{\alpha}_1\tilde{\tau}_1 + \dot{\alpha}_2\tilde{\tau}_2 + \dot{\alpha}_3\tilde{\tau}_3 \\ \omega &= \dot{\alpha}_1\tau_1 + \dot{\alpha}_2\,\tau_2 + \dot{\alpha}_3\tau_3 \end{aligned} \tag{1.20}$$

unde vectorii $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ și $\tilde{\tau}_3$ sînt versorii axelor succesive de rotație văzuți din reperul fix, iar vectorii τ_1, τ_2, τ_3 sînt în mod analog versorii axelor de rotație văzuți din reperul mobil. Acești versori sînt dați de :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathbf{i}_\lambda, \quad \tau_2 = \mathbf{R}_\lambda^T\mathbf{i}_\mu, \quad \tau_3 = \mathbf{R}_\lambda^T\mathbf{R}_\mu^T\mathbf{i}_\nu \\ \tilde{\tau}_1 &= \mathbf{R}_\nu\mathbf{R}_\mu\mathbf{i}_\lambda, \quad \tilde{\tau}_2 = \mathbf{R}_\nu\mathbf{i}_\mu, \quad \tilde{\tau}_3 = \mathbf{i}_\nu \end{aligned} \tag{1.21}$$

În mod evident

$$\tilde{\tau}_k = \mathbf{Q}\tau_k \tag{1.22}$$

Derivata în raport cu timpul a vectorului ω este

$$\dot{\omega} = \dot{\alpha}_k \tau_k + \varepsilon_c \tag{1.23}$$

unde acceleraţia complementară (de rotaţie) ε_c este

$$\varepsilon_c = -\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\tau_1 \times \tau_2 - \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\tau_1 \times \tau_3 - \dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\tau_2 \times \tau_3 \tag{1.24}$$

În cazul particular $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\nu = 3$ se obţin unghiurile lui Euler şi anume rotaţia $\alpha_1 = \varphi$ mutaţia $\alpha_2 = \theta$ şi precesia $\alpha_3 = \psi$
n acest caz

$$\tau_1 = \mathbf{i}_3$$

$$\tau_2 = \mathbf{R}_3^T(\varphi)\,\mathbf{i}_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\tau_3 = \mathbf{R}_3^T(\varphi)\mathbf{R}_1^T(\theta)\mathbf{i}_3 = \begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix}$$

unde $\mathbf{i}_k (k = 1, 2, 3)$ sînt versorii axelor de coordonate în sistemul mobil.

2. DEFORMAŢIA INFINITEZIMALĂ A CORPULUI, LEGEA CONSTITUTIVĂ

Gradientul de deformaţii al corpului faţă de reperul fix este

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{QF} = \mathbf{Q}(\mathbf{1} + \mathbf{H}) \tag{2.1}$$

unde $\mathbf{F}$ reprezintă gradientul deformaţiei faţă de reperul mobil iar $\mathbf{H}$ este gradientul vectorului deplasare faţă de reperul mobil. Tensorul Cauchy al deformaţiei $\tilde{\mathbf{C}}$ şi tensorul $\tilde{\mathbf{U}}$ definite de

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^T\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{C} \tag{2.2}$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$$

sînt invarianţi faţă de o schimbare de reper.
În virtutea unicităţii descompunerilor

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} \tag{2.3}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{U}}$$

din (2.1) rezultă

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{QR}, \qquad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{QRU} \tag{2.4}$$

Tensorul deformației

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \tag{2.5}$$

este de asemenea, invariant la o schimbare de reper. Liniarizînd relațiile (2.7) și (2.5) în ipoteza neglijării termenilor de ordinul doi în H avem

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cong \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \tag{2.6}$$

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{1} + \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)$$

Al doilea tensor Piola-Kirchoff

$$\Pi = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = L_2(\mathbf{E}) \tag{2.7}$$

este invariant la o schimbare de reper.

În (2.7) W este energia potențială de deformație și $L_2(\mathrm{E})$ este gradientul ei în raport cu tensorul de deformație.

Tensorii Cauchy ai tensiunii în raport cu reperul fix și respectiv, mobil sînt

$$\tilde{\mathbf{T}} = j\tilde{\mathbf{F}}\Pi\tilde{\mathbf{F}}^T = j\mathbf{Q}\mathbf{F}\,\Pi\,\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{T} = j\mathbf{F}\Pi\mathbf{F}^T \cong \Pi \tag{2.8}$$

unde $j = |\det \mathbf{F}|^{-1}$ este inversul Jacobianului transformării. Din (2.8) rezultă

$$\tilde{\mathbf{T}} \cong \mathbf{Q}L_2(\mathbf{E})\mathbf{Q}^T \tag{2.9}$$

Primul tensor Piola Kirchoff al tensiunii este

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{F}}\Pi = \mathbf{Q}(\mathbf{1} + \mathbf{H})L_2(\mathbf{E}) = \mathbf{Q}\mathbf{T} \tag{2.10}$$

3. FORMULAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ

a) *Condițiile inițiale și condițiile la limită.* Poziția reperului mobil la momentul inițial este dată de următoarele condiții:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(0) &= \mathbf{x}_0^{(0)} \\ \dot{\mathbf{x}}_0(0) &= \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \alpha_k(0) &= \alpha_k^{(0)} \\ \dot{\alpha}_k(0) &= \alpha_k^{(1)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Totodată, identificăm poziția inițială a corpului față de reperul mobil prin condițiile

$$\mathbf{u}(\xi, 0) = \mathbf{u}^{(0)}(\xi)$$

$$\xi \in \mathscr{V} \tag{3.2}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\xi, 0) = \mathbf{u}^{(1)}(\xi)$$

Ipoteza de liniarizare în raport cu micile deformații ale corpului față de reperul mobil conduce la formularea condițiilor la limită pe frontiera nedeformată a corpului față de acest reper. Problema mixtă în deplasări și tensiuni permite punerea următoarelor condițiila limită

$$\mathbf{u}(\xi, t) \mid_{\mathscr{S}_1} = \mathbf{f}(\xi) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{QT}\,\mathbf{n} \mid_{\mathscr{S}_2} = \tilde{\mathbf{t}}(\xi, t) = \mathbf{Qt}(\xi, t)$$

unde $\mathscr{S}_1$ și $\mathscr{S}_2$ sînt părți ale frontierei corpului pe care sînt date deplasările și respectiv tensiunile normale. Menționăm că tensiunile normale provenite din primul tensor Piola-Kirchoff aproximat de (2.10) sînt date față de reperul fix.

b) *Ecuații de mișcare.* Ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy sînt următoarele :

$$\tilde{\mathbf{e}} = \rho\ddot{\mathbf{x}} - \rho\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{Q}\,\mathrm{Div}\,\mathbf{T} = 0 \tag{3.4}$$

sau transcrise față de reperul mobil se scriu

$$\mathbf{e} = \rho\,\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{x}} - \rho\,\mathbf{b} - \mathrm{Div}\;\mathbf{T} = 0 \tag{3.5}$$

unde $\tilde{\mathbf{b}}$ și $\mathbf{b}$ sînt vectori. Din (1.6) rezultă prin derivare cîmpul de viteze și accelerații

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{Q}[\omega \times (\xi + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{Q}\{\dot{\omega} \times (\xi + \mathbf{u}) + 2\omega \times \dot{\mathbf{u}} + \tag{3.6}$$

$$+ \ddot{\mathbf{u}} + \omega \times [\omega \times (\xi + \mathbf{u})]\}$$

și condițiile de unicitate (care determină în mod unic mișcarea de rigid a corpului deformabil).

$$\int_{\mathscr{V}} \rho\,\dot{\mathbf{u}}\,dV = 0, \quad \int_{\mathscr{V}} \rho\,\ddot{\mathbf{u}}\,dV = 0 \tag{3.7}$$

Ecuațiile care corespund mișcării de rigid se obțin din (3.4) prin integrare pe $\mathscr{V}$ și respectiv prin înmulțirea lor vectorială cu $(\xi + \mathbf{u})$ și integrare pe $\mathscr{V}$. Obținem

$$\int_{\mathscr{V}} \tilde{\mathbf{e}}\,dV = m\ddot{\mathbf{x}}_0 + m\mathbf{Q}[\dot{\omega} \times \xi_G + \omega \times (\omega \times \xi_G)] -$$

$$-\int_{\mathscr{V}} \tilde{\mathbf{b}}\rho\, dV - \mathbf{Q}\int_{\mathscr{S}} \mathbf{T}\mathbf{n}\, dS = 0 \tag{3.8}$$

$$\int_{\mathscr{V}} (\xi + \mathbf{u}) \times \mathbf{e}\ddot{\mathbf{u}} dV = m\, \xi_G \times \mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{x}}_0 + (\dot{\mathbf{J}} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^T(\mathbf{u}))\dot{\omega} +$$

$$+ 2\mathbf{K}^T(\dot{\mathbf{u}})\,\omega + \omega \times [\mathbf{J} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^T(\mathbf{u})]\omega + \tag{3.9}$$

$$+ \int_{\mathscr{V}} \xi \times \ddot{\mathbf{u}}\ \rho dV - \int_{\mathscr{V}} \xi \times \mathbf{b}\ \rho dV$$

$$-\int_{\mathscr{S}} \xi \times \mathbf{T}\mathbf{n}\, dS = 0$$

unde am neglijat termenii de ordinul doi în u.

În (3.9) am notat

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{V}} [\langle \zeta, \mathbf{u} \rangle \mathbf{1} - \xi \otimes \mathbf{u}]\ \rho dV. \tag{3.10}$$

Condiţiile de unicitate au permis eliminarea deplasărilor din ecuaţiile de mişcare (3.8), ele permiţînd determinarea traiectoriei originii reperului mobil, în cazul $\mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$.

Ecuaţiile (3.9) generalizează ecuaţiile lui Euler din cazul mişcării rigidului. Prezenţa deplasării $\mathbf{u}$ în aceste ecuaţii arată dependenţa mişcării reperului mobil de starea de deformaţie a corpului. Pentru a evidenţia unghiurile α_k, $k = 1, 2, 3$ transcriem ecuaţia (3.9) sub forma

$$\ddot{\alpha}_k \mathbf{J}^*\tau_k + \dot{\alpha}_k\dot{\alpha}_l(\tau_k \times \mathbf{J}^*\tau_l) - \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\,\mathbf{J}^*(\tau_1 \times \tau_2) -$$

$$- \dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\,\mathbf{J}^*\ (\tau_2 \times \tau_3) - \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\,\mathbf{J}^*(\tau_1 \times \tau_3) + 2\alpha_k\mathbf{K}^T(\dot{\mathbf{u}})\tau_k + \tag{3.11}$$

$$+ \xi_G \times \mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{g} = 0$$

unde g este momentul forţelor exterioare calculat faţă de originea mobilă.

$$\mathbf{g} = \int_{\mathscr{V}} \xi \times \mathbf{b}\mathbf{g} dV + \int_{\mathscr{S}_1} \xi \times \mathbf{T}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n} dS + \int_{\mathscr{S}_2} \xi \times \mathbf{t}\, dS \tag{3.12}$$

şi

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^T(\mathbf{u}) \tag{3.13}$$

c) *Aplicarea metodei Galerkin în rezolvarea problemei la limită.* Admitem existența unui sistem de funcții coordonate φ^s ($s = 1, \ldots .N$) care satisfac identic condițiile la limită omogene

$$\varphi^s(\xi) \mid_{\mathscr{S}_1} = 0$$
$$\mathbf{QT}(\varphi^s) \mid_{\mathscr{S}_2} = 0 \tag{3.14}$$

În acest caz căutăm o soluție aproximativă a problemei la limită de forma

$$\mathbf{u}(\varphi, t) = \mathbf{u}^0(\varphi, t) + q_s(t)\, \varphi^s(\xi) \tag{3.15}$$

unde $q_s(t)$ reprezintă coordonatele generalizate atașate deformației infinitezimale a corpului, iar $\mathbf{u}^0(\xi, t)$ este o soluție particulară care satisface condițiile la limită (3.3).

Înmulțind scalar ecuația de mișcare (3.5) cu $\varphi^s(\xi)$ și integrînd pe $\mathscr{V}$ obținem

$$\int_{\mathscr{V}} \langle \mathbf{a}, \varphi^s \rangle \, dV = \langle \psi^s + \psi_0^s + q_r \psi^{rs}, \omega \rangle +$$
$$+ \dot{q}_r \langle \psi^{rs}, \omega \rangle - \langle \omega, [\mathbf{K}(\varphi^s) + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \varphi^s)]\, \omega \rangle + \tag{3.16}$$
$$+ \ddot{q}_r \int_{\mathscr{V}} \langle \varphi^r, \varphi^s \rangle \rho dV - \int_{\mathscr{S}_2} \langle \varphi^s, t \rangle \, dS -$$
$$- \int_{\mathscr{V}} \langle \mathbf{b}, \varphi^s \rangle \rho dV + \frac{2\pi}{2q_s} = 0$$

unde

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathscr{V}} [\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{1} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}] \rho dV$$
$$\psi^s = \int_{\mathscr{V}} \xi \times \varphi^s \rho dV \tag{3.17}$$
$$\psi_0^s = \int_{\mathscr{V}} \mathbf{u}_0 \times \varphi^s \rho dV$$
$$\psi^{rs} = \int_{\mathscr{V}} \varphi^r \times \varphi^s \rho dV$$

şi Π este energia potenţială de deformaţie a corpului elastic

$$\Pi = \frac{1}{2} q_r q_s \int_V c_{ijkl} \varphi^r_{i,j} \varphi^s_{k,l} \, dV + q_r \int_V c_{ijkl} u^0_{i,j} \varphi^r_{k,l} \, dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V c_{ijkl} u^0_{i,j} u^0_{k,l} \, dV .$$

Primit în redacţie la 19 decembrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theory of mechanics*, Handbuch der Physik, **III**/3, ed. Flügge, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1965.
2. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică Bucureşti, 1963.

STUDIUL COMPARATIV DIN PUNCT DE VEDERE CAVITAȚIONAL, TEORETIC ȘI EXPERIMENTAL, AL REȚELELOR DE PROFILE MHT 1—12

de V. R. ANCUȘA

Universitatea Tehnică Timișoara

Se prezintă caracteristicile de cavitație determinate teoretic în ipoteza mișcării potențiale plane a unui fluid nevîscos prin rețele drepte de profile MHT 1—12. Ele au fost determinate pe baza metodei propuse de E. Martensen [8] cu completările aduse de D. H. Wilkinson [10], metodă care a fost utilizată și în lucrarea [3]. Se arată că această metodă permite obținerea unor rezultate apropiate de realitate (fig. 1 și 2). Se compară datele obținute teoretic prin metoda de mai sus cu cele experimentale obținute de V. Anton [7]. Rezultă o bună concordanță între rezultatele experimentale și cele teoretice, existînd o tendință de deplasare spre stînga a curbelor de cavitație experimentale față de cele teoretice. În final se prezintă o caracteristică universală de cavitație care stabilește niște performanțe cavitaționale teoretice acoperitoare față de datele experimentale.

INTRODUCERE

Cunoașterea caracteristicilor energetice ale unui profil nu este suficientă pentru caracterizarea funcționării sale în cadrul unei mașini hidraulice ci se impune în mod imperios cunoașterea și a performanțelor sale cavitaționale [4], [5]. Așa cum s-a subliniat și într-o lucrare anterioară [2] descrierea completă a funcționării profilului dispus în rețea se face cel mai bine cu ajutorul caracteristicilor sale universale introduse de către V. Anton [7]. Determinarea însă pe cale experimentală a caracteristicilor universale ale profilului dispus în rețea este o problemă dificilă și laborioasă [7]. În lucrarea [2] se prezintă o metodă teoretică de determinare a caracteristicii universale a unui profil dispus într-o rețea dreaptă, metodă bazată pe lucrarea [9], aplicabilă în cazul profilelor subțiri și puțin curbate, fără a se prezenta performanțele cavitaționale. În lucrarea [3] s-a extins metoda de construire a caracteristicilor universale și la cazul profilelor groase și curbate, prezentîndu-se parțial rezultatele obținute pentru caracteristicile cavitaționale. Lucrarea [3] se bazează pe lucrările lui E. Martensen [8] și D. H. Wilkinson [10]. Lucrarea de față prezintă rezultatele obținute în ceea ce privește caracteristicile cavitaționale ale rețelelor de profile cu aplicație la profilul MHT 1—12 bine studiat din punct de vedere experimental [7].

PERFORMANȚELE CAVITAȚIONALE ALE REȚELELOR DE PROFILE MHT 1—12

Caracterizarea comportării cavitaționale a profilului dispus în rețea se face cu ajutorul curbelor de sensibilitate la cavitație introduse de către I. Anton și O. Popa [6]. Acestea reprezintă ansamblul curbelor coeficientului de depresiune maximă de pe profil $k_{p\,max}$ și abscisei relative

a punctului unde se realizează acest minim în funcţie de unghiul de incidenţă α_∞ sau de unghiul de intrare β_1 pentru un pas relativ t/l şi unghi de instalare β_s date.

Coeficientul de depresiune maximă este:

$$k_{p\,max} = \frac{p_\infty - p_{min}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}, \tag{1}$$

unde p_∞ — presiunea curentului de viteză v_∞:

v_∞ — viteza asimptotică;

p_{min} — presiunea minimă pe conturul profilului.

În datele experimentale se utilizează coeficientul de depresiune maximă $k_{p\,max\,1}$, care este raportat la viteza de intrare v_1.

$$k_{p\,max\,1} = \frac{p_1 - p_{min}}{\frac{\rho v_1^2}{2}}, \tag{2}$$

unde p_1 — presiunea curentului amonte de viteză v_1.

v_1 — viteza asimptotică amonte.

Între cele două mărimi există relaţia de legătură [3], [4]:

$$k_{p\,max\,1} = (1 + k_{p\,max}) \cdot \left[\frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_s + \alpha_\infty}\right]^2 - 1 \tag{3}$$

Cunoaşterea valorii coeficientului de depresiune maximă necesită cunoaşterea repartiţiei de viteze şi presiuni pe conturul profilului. Dintre metodele existente în literatură s-a apelat la metoda propusă de O. Popa [9] pentru care există programele de calcul elaborate în cadrul lucrării [1] şi la metoda elaborată de E. Martensen [8] şi completată de D. H. Wilkinson [10], metodă utilizată şi în cadrul lucrării [3]. Ambele metode consideră mişcarea potenţială plană a unui fluid incompresibil nevîscos. Ţinînd cont că efectul reţelei este maxim la pasuri relative mici şi unghiuri de instalare mult diferite de 90°, în figura 1 se prezintă comparativ rezultatele teoretice obţinute prin cele două metode, suprapus peste datele experimentale obţinute de V. Anton [7]. Se remarcă că metoda [8], [10] dă rezultate mai apropiate de realitate decît metoda [9]. Aceeaşi concluzie s-a obţinut şi pentru caracteristicile energetice [3]. Din acest motiv în continuare s-a utilizat metoda [8] cu precizările introduse în [10] şi care este prezentată pe larg în [3].

În figura 2 se prezintă caracteristica de cavitaţie determinată teoretic pentru o reţea de profile MHT 1 — 12 la $t/l = 0{,}5$ şi $\beta_s = 90°$. Comparativ sînt suprapuse şi caracteristicile de cavitaţie determinate de V. Anton [7] din analiza repartiţiilor de presiuni. Se constată o bună concordanţă atît pentru maximele absolute ale coeficientului de depresiune cît şi pentru maximele relative. Diferenţe semnificative apar doar în momentul desprinderii curentului. În cazul exemplificat în figura 2

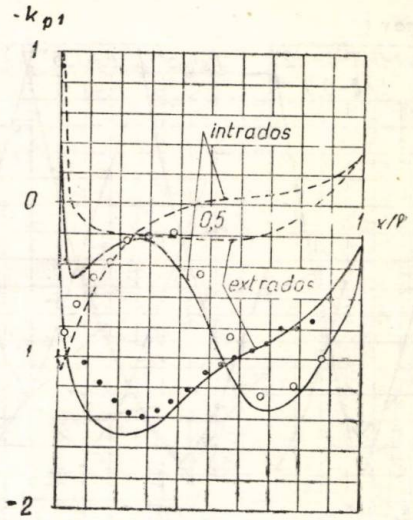


Fig. 1. — Compararea repartiției de presiuni pentru profilul MHT 1—12 dispus în rețea dreaptă cu $t/l = 0,5$ și $\beta_s = 30°$ la $\beta_1 = 27,5°$
——— teoretic metoda [8], [10], [3]
– – – teoretic metoda [9], [1]
○ puncte experimentale pentru intrados [7]
● puncte experimentale pentru extrados [7]

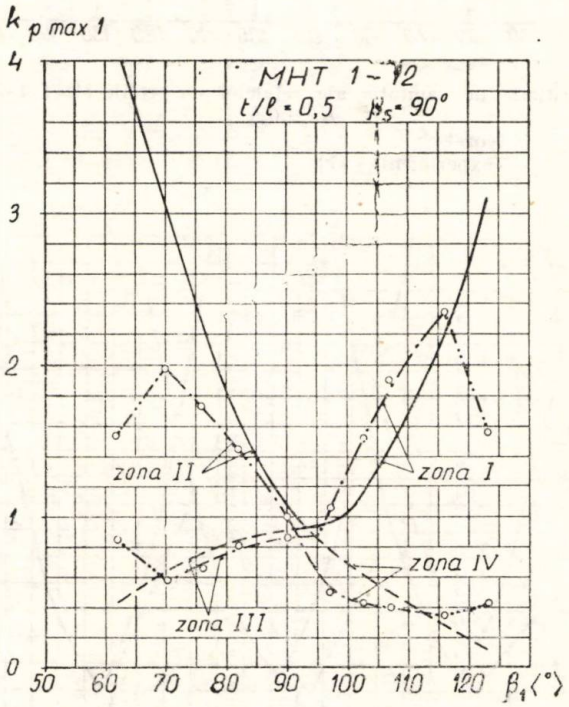


Fig. 2. — Caracteristica de cavitație a rețelei de profile MHT 1—12 la $t/l = 0,5$ și $\beta_s = 90°$
——————— teoretic maxim absolut;
— — — — teoretic maxim relativ;
———·——· experimental maxim absolut;
·— —·— —· experimental maxim relativ;
·· — ·· — ·· experimental desprindere;
○ puncte determinate experimental

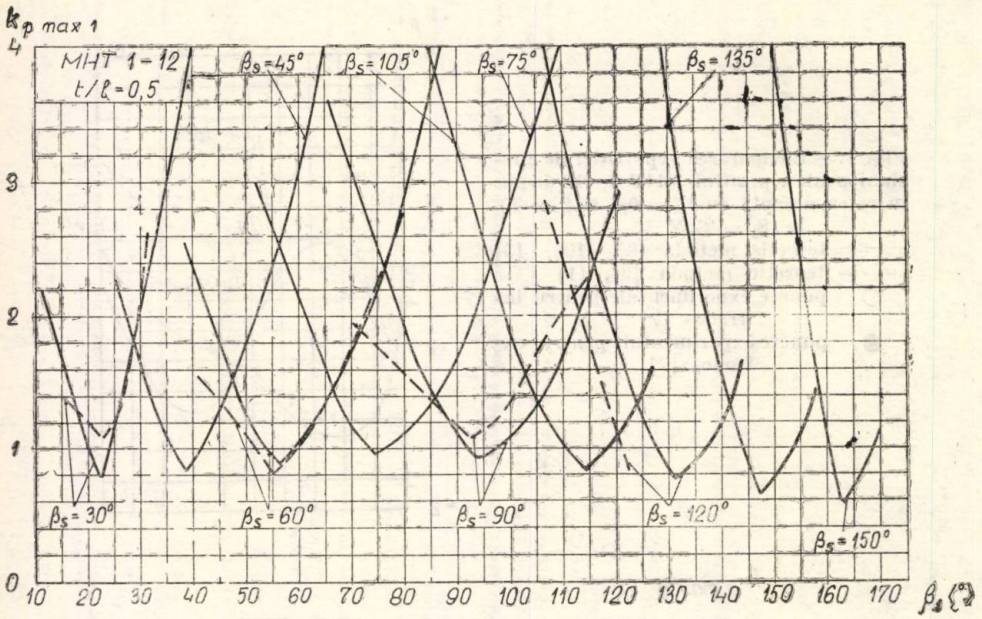


Fig. 3. — Caracteristicile de cavitaţie ale reţelelor de profile MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 0{,}5$

——— —— teoretic;
— — — — experimental [7]

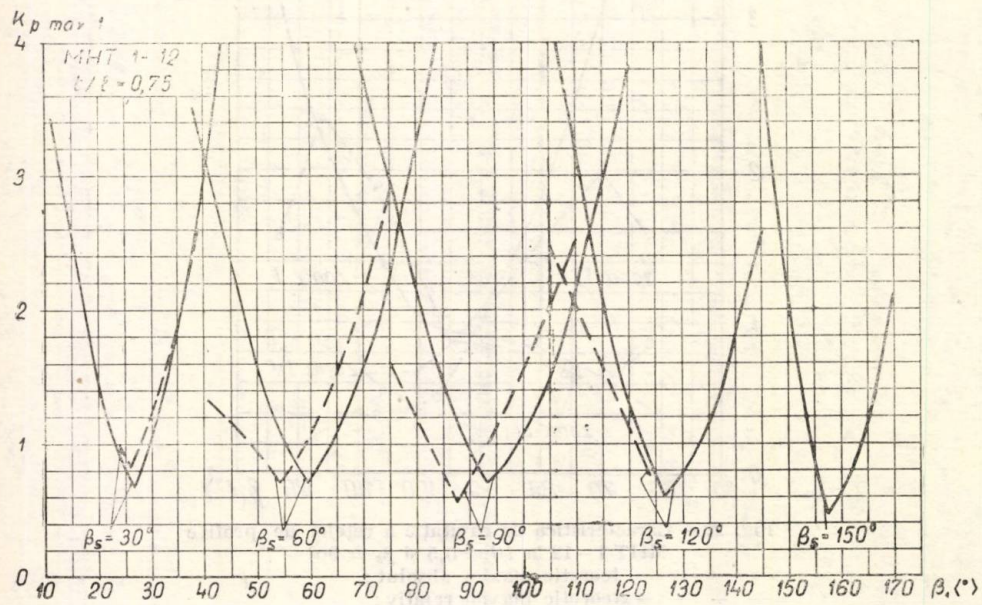


Fig. 4. — Caracteristicile de cavitaţie ale reţelelor de profile MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 0{,}75$

——— —— teoretic;
— — — — experimental [7]

acestea se produc la $\beta_1 < 70°$, respectiv la $\beta_1 > 116°$. Se remarcă, ceea ce s-a subliniat și în [7] de către V. Anton că locul de apariție al minimului de presiune se deplasează pe conturul profilului la incidențe pozitive din zona III de cavitație spre zona I, iar la incidențe negative din zona IV spre zona II. Pe ansamblu apare o ușoară deplasare a caracteristicilor experimentale spre stînga față de cele teoretice, aceasta datorîndu-se modelului de fluid nevîscos utilizat în tratarea teoretică.

În figura 3 se prezintă dependențele $k_{p\,max\,1}$ (β_1) pentru diferite valori ale unghiului de instalare β_s la un pas relativ $t/l = 0{,}5$. Suprapus s-au reprezentat și rezultatele experimentale obținute de către V. Anton [7]. Se constată că rezultatele teoretice sînt apropiate de cele experimentale. Diferențele cresc cu mărirea unghiului de instalare β_s. În general ramura din dreapta care descrie zona I de cavitație este bine determinată, diferențe mai mari existînd pe ramura din stînga a curbelor care corespunde zonei II de cavitație. Această diferență se apreciază că se datorește desprinderii curentului pe intrados la depresiuni nu prea ridicate.

La pasul relativ $t/l = 0{,}75$ s-au reprezentat caracteristicile de cavitație în figura 4. Se remarcă un decalaj ceva mai mare la unghiurile de instalare $\beta_s = 60°$ și $\beta_s = 90°$.

În figura 5 sînt reprezentate caracteristicile de cavitație ale profilului MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 1$. Se constată diferențe mici între teorie și experiment. În general în toate diagramele prezentate se observă o deplasare spre stînga a curbelor experimentale față de cele teoretice. Cauza acestor deplasări este modelul de fluid nevîscos utilizat în cadrul metodei teoretice.

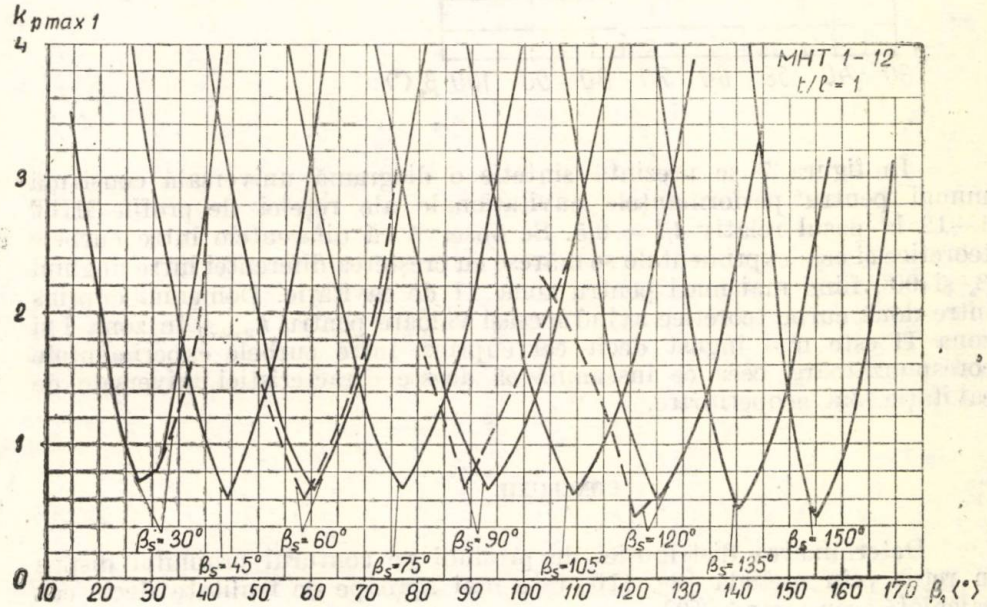


Fig. 5. — Caracteristicile de cavitație ale rețelelor de profile MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 1$
——— teoretic;
— — — — experimental [7]

În figura 6 se prezintă ca reprezentative efectele modificării pasului relativ asupra curbelor caracteristice de cavitaţie pentru reţele de profile MHT 1—21 la un unghi de instalare $\beta_s = 60°$. Se constată o bună concordanţă între teorie şi experiment.

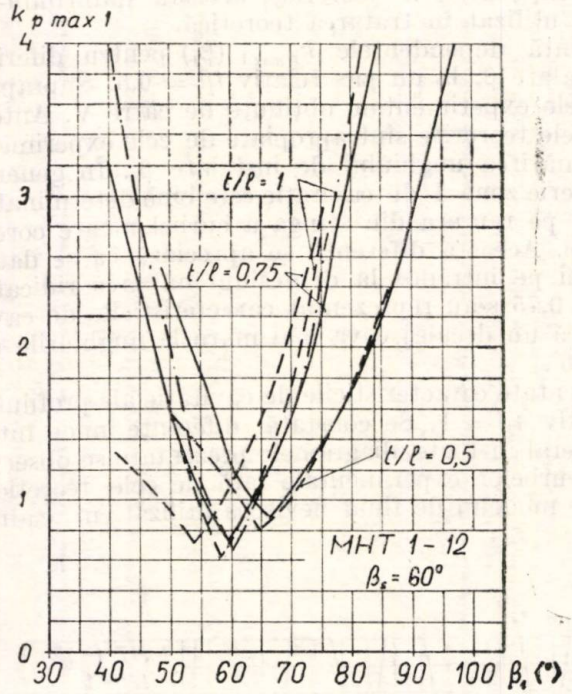


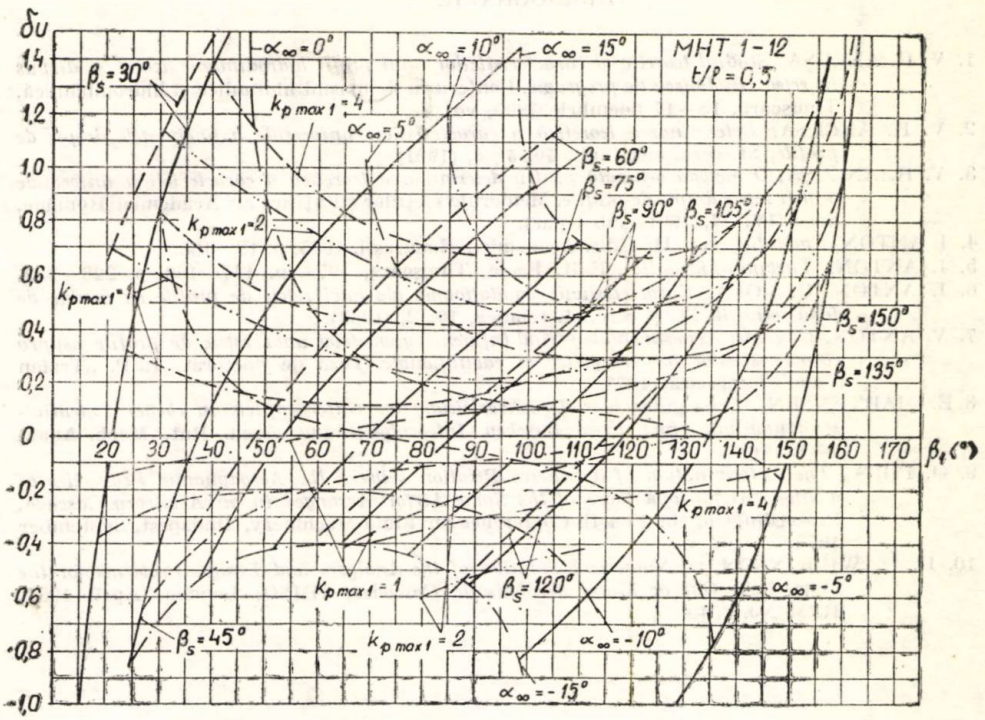
Fig. 6. — Influenţa pasului relativ asupra caracteristicilor de cavitaţie ale reţelelor de profile MHT 1—12
——— }teoretic;
— — — experimental

În figura 7 se prezintă sintetic o diagramă universală construită numai pentru performanţele cavitaţionale ale reţelei de profile MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 0{,}5$. Se observă că diferenţele între curbele teoretice şi cele exprimentale se măresc cu creşterea diferenţei între unghiul β_s şi 90°, fiind mai mari pentru zona II de cavitaţie. Domeniul cuprins între două curbe teoretice avînd aceeaşi valoare pentru $k_{p\,max\,1}$ în zona I şi zona II este mai îngust decît cel cuprins între curbele experimentale corespunzătoare, ceea ce înseamnă că aceste caracteristici universale de cavitaţie sînt acoperitoare.

CONCLUZII

Determinarea distribuţiei de presiuni pe conturul profilului dispus în reţea prin metoda [8], [10] este mai aproape de realitate decît cea calculată prin metoda [9].

Caracteristica de sensibilitate la cavitaţie determinată teoretic (fig. 2) este în bună concordanţă cu datele experimentale [7] atît pentru



— Diagrama universală pentru caracteristicile cavitaționale ale profilului MHT 1—12 la pasul relativ $t/l = 0{,}5$

——— δU teoretic; — — · — — · $k_{p\max}$ 1 teoretic;
— — — — δU experimental; — · · — · · $k_{p\max}$ 1 experimental,
— · — · α_∞ = constant teoretic

maximele absolute cît și pentru cele relative ale coeficientului de depresiune.

Utilizînd distribuțiile de presiuni stabilite conform [8], [10] s-au determinat caracteristicile de cavitație $k_{p\max 1}(\beta_1)$ cu β_s ca parametru pentru $t/l = 0{,}5$; 0,75 și 1. Aceste dependențe au fost comparate cu rezultatele experimentale obținute de V. Anton [7], găsindu-se într-o bună concordanță. În general apare o tendință de deplasare spre stînga a curbelor experimentale de cavitație în raport cu cele teoretice.

Se prezintă influența pasului relativ asupra curbelor de sensibilitate la cavitație, confirmînd teoretic rezultatele obținute experimental de către V. Anton [7].

Diagrama universală de cavitație stabilită teoretic conform [3] vine să stabilească niște domenii mai înguste decît cele reale, deci este acoperitoare.

Metoda teoretică expusă permite studierea performanțelor cavitaționale ale rețelelor de profile în bune condiții.

Primit în redacție la 12 noiembrie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. V. R. ANCUŞA, *Studiul teoretic al caracteristicilor unui profil hidrodinamic izolat şi dispus în reţea. Bibliotecă de programe*, Conferinţa de maşini hidraulice şi hidrodinamică, Timişoara, 15—17 noembrie 1990, vol. I.
2. V. R. ANCUŞA, *Determinarea teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile*, St. cerc. mec. apl., **50**, *5—6*, (1991).
3. V. R. ANCUŞA, *O metodă generală pentru determinarea teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile*, Memoriile secţiilor ştiinţifice ale Academiei Române, Seria IV, **14**, 1991 (sub tipar).
4. I. ANTON, *Cavitaţia*, vol. **II**, Edit. Academiei, Bucureşti, 1985, p. 19—108.
5. I. ANTON, *Turbine hidraulice*, Edit. Facla, Timişoara, 1979, p. 147—160, p. 228—252.
6. I. ANTON, O. POPA, *Caracteristicile cavitaţionale ale unei reţele de profile cu bordul de fugă rotunjit*, St. şi cerc. şt. tehnice, **10**, *2*, (1963).
7. V. ANTON, *Cercetări experimentale privind influenţa geometriei unor reţele de profile asupra caracteristicilor lor energetice şi cavitaţionale*, Teză de doctorat, I. P. „Traian Vuia" Timişoara, 1972.
8. E. MARTENSEN, *Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung*, Arch. Rat. Mech. Anal., *3* (1959).
9. O. POPA, *The Determination of a General Relation between the Aerodynamic Properties of a Single Airfoil and those of the Same Airfoil Arranged in an Arbitrary Cascade*, Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinery, Budapest, September 1972.
10. D. H. WILKINSON, *A Numerical Solution of the Analysis and Design Problems for the Flow Past One or More Aerofoils or Cascades*, HMSO, London, April 1967, R&M No. 3545.

PROCEDURA DE CORECȚIE CU NUMĂRUL REYNOLDS A POLARELOR UNUI AVION

de V. MUȘAT M. STOIA

INCREST, București Institutul Politehnic București

În acest articol este prezentată prima procedură completă de corecție cu numărul Reynolds (corecție de scară) implementată în cadrul Institutului de Aviație INCREST. În cadrul procedurii se face o corecție a coeficienților de : portantă, rezistență la înaintare și moment de tangaj. Corecțiile de rezistență de frecare sînt făcute prin analogie cu placa plană iar corecțiile de portantă maximă sînt făcute cu teoria liniei portante, avînd ca bază caracteristicile aerodinamice ale profilului generator al aripii.
Sînt prezentate rezultatele obținute cu această procedură pentru un avion subsonic clasic.

1. INTRODUCERE

Corecțiile de număr Reynolds (Re) se aplică rezultatelor experimentale, obținute cu machete la scară în sufleriile aerodinamice la numere Re mici, pentru extrapolarea lor la condițiile reale de zbor ale avionului.

Necesitatea corecției rezultatelor de suflerie cu numărul Re a apărut simultan cu primele suflerii aerodinamice. Acest fapt se datorează imposibilității obținerii în cadrul acestora a unor curgeri similare cu cele din zborul avionului. Abia în ultimii ani, datorită progreselor tehnologice remarcabile au fost construite și în Europa suflerii industriale cu presiune variabilă sau criogenice [8], fapt ce elimină necesitatea unor corecții de număr Reynolds.

Se spune că există similitudinea completă a două curgeri de fluide dacă există similitudinea limitelor și dacă traiectoriile particulelor de fluid sînt geometric asemănătoare și în două puncte omoloage, vitezele sînt în raport constant, independent de cele două puncte considerate. După cum se știe parametrii adimensionali Sh, Fr, Re, Pr și Ec controlează legile de similitudine ale mișcării iar mărimea lor relativă furnizează indicații asupra faptului dacă unul sau altul din termeni poate fi neglijat, vezi [1] și [2].

În general nu există un fluid real care să satisfacă toate condițiile de similitudine. Din fericire, cîțiva parametri sînt mai puțin importanți și pot fi neglijați în comparație cu alții. Se aleg condițiile de similitudine cele mai importante și în același timp compatibile între ele. Astfel se ajunge la noțiunea de similitudine restrînsă.

În cazul curgerii staționare a gazelor ușoare, cum este cazul aerului, se pot neglija parametrii Sh, Fr, Pr și rezultă că singurii parametri adimensionali importanți sînt numerele Re și Ec. Pentru mișcările incompresibile singurul parametru important este numărul Re, fapt evident dacă se consideră că forțele de inerție sînt echilibrate de cele de frecare, în absența unor manifestări a efectelor de elasticitate.

Literatura de specialitate, vezi [3], [4] și [7] este destul de săracă în ceea ce privește corecțiile de scară care sînt utilizate în lume. O trecere în revistă a unor procedee este dată în [9]. Cea mai completă procedură de corecție [7], este asemănătoare cu cea propusă aici.

În mod special trebuie atrasă atenția asupra unor condiții esențiale care tebuiesc îndeplinite, vezi [9], în vederea obținerii unor rezultate pertinente prin corecția de număr Re.

2. PROCEDURA PROPUSĂ

Procedura de corecții propusă se aplică numai pentru avioane cu fuselaj lung, teoretic neportant, și aripa de alungire mare (curgere cu pronunțat caracter bidimensional). Pentru avioanele la care fuselajul și aripa de alungire mică formează un ansamblu portant (curgeri cu pronunțat caracter tridimensional), metoda nu are un suport teoretic și fenomenologic și nu se aplică.

Condiția principală pentru o extrapolare corectă este ca experimentările, la numere Re reduse specifice machetei și tunelului aerodinamic, să permită dezvoltarea unei curgeri fără și cu desprinderi cît mai apropiată de cea care se realizează în mod natural pe avion în zbor.

Procedura de corecții propusă în acest articol este compusă din trei părți și anume:

a) corecția de Re a portantei, alcătuită din două faze
   — estimarea coeficientului de portantă maximă $C_{L\,max}$, pentru numărul Re curent de zbor
   — extinderea curbei $C_L = f(\alpha)$ pe domeniul cvasiliniar
b) corecția de Re a rezistenței la înaintare, alcătuită din două faze
   — estimarea coeficientului minim de rezistență C_{D0}, pentru numărul Re curent de zbor
   — extinderea curbei $C_D = f(\alpha)$ pe domeniul cvasiliniar al curbei $C_D = f(C_L^2)$ corespunzător creșterii de portantă ΔC_{max}
c) corecția de Re a momentului de tangaj prin extinderea curbei $C_m = f(\alpha)$ pe domeniul cvasiliniar, corespunzător creșterii de portantă $\Delta C_{L\,max}$.

Estimarea portantei maxime și a rezistenței minime, pentru numărul Re curent de zbor, se face independent, în timp ce extinderea curbelor C_L, C_D și C_m funcție de incidenta α, se face corelat pe un domeniu de incidență $\Delta\alpha$.

Corecția se aplică în principiu configurației aripă-fuselaj, peste care se poate suprapune efectul ampenajului orizontal.

2.1 Corecția de portantă. Prima fază a acestei corecții o reprezintă estimarea portantei maxime a avionului $C_{L\,max\,(A)}$ la Re de zbor, pe baza portanței maxime a machetei $C_{L\,max\,(M)}$ la Re de experimentare. Portanta maximă depinde în măsură mare de numerele Re și Mach, și de aceea este obligatoriu ca experimentările din suflerii să respecte numărul M de zbor. Rămîne astfel a se face doar corecția de număr Re pe baza unor curbe $C_L = f(\alpha, \text{Re})$ existente pentru profilul generator al aripii.

Se are în vedere ipoteza că portanta maximă a avionului este determinată de portanta maximă a aripii în prezența fuselajului și gondolelor motoarelor de pe aripă. Această ipoteză este perfect justificată în cazul avioanelor cu fuselaj lung și aripă de alungire mare.

Estimarea coeficientului $C_{L\,\max}$ al unei aripi de alungire mare, aproximativ dreaptă, se face urmînd o metodologie apropiată de cea expusă în [5] și [6]. Se consideră că aripa atinge $C_{L_{\max}}$ atunci cînd într-o secțiune pe anvergură coeficientul local de portantă atinge valoarea maximă, pentru profilul respectiv la numărul Re local raportat la coarda locală. Datorită efectului de reducere a incidenței locale, datorat anvergurii finite, este de așteptat ca incidenta critică, α_{crit}, a aripii să fie mai mare decît cea de portantă maximă a profilului; de asemenea efectul reducerii incidenței locale trebuie să se manifeste și prin creșterea zonei de liniaritate a curbei $C_L = f(\alpha)$ pentru aripă.

Distribuția sarcinii pe anvergură se calculează folosind un model de linie portantă adaptat scopului urmărit, în sensul că permite luarea în considerare a curbei $C_L = f(\alpha)$ pentru profilul considerat la numărul Re local.

Incidenta aerodinamică α_a, în secțiunea y în anvergură este:

$$\alpha_a(y) = \alpha_g(y) - \varepsilon(y) \qquad y \in (-b/2,\ +b/2) \tag{1}$$

unde α_g este incidenta geometrică și ε este incidenta indusă în secțiune y, dată de expresia

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{+b/2} \gamma(y') \frac{y - y'}{(y - y')} \, dy' \tag{2}$$

Coeficientul de portantă locală poate fi aproximat, în urma unei liniarizări locale, cu relația:

$$C_L(y,\ \mathrm{Re}(y),\ \alpha_a(y)) \simeq C^g_{L_\infty}(y,\ \mathrm{Re}(y),\ \alpha_g(y)) - \varepsilon(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} C^g_{L_\infty}(y,\ \mathrm{Re}(y), \alpha_g(y)) \tag{3}$$

unde cu $C^g_{L_\infty}$ s-a notat portanta profilului dată la incidenta geometrică α_g. Înlocuind expresia (2) în relația (3) se obține ecuația integro-diferențială Prandtl-Glauert:

$$\overline{\Gamma}(y) - \frac{\partial C^g_{L_\infty}(y)}{\partial \alpha} \cdot \frac{c(y)}{8\pi} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma(y')\, dy'}{(y - y')^2} = \frac{c(y)\ C^g_{L_\infty}(y)}{2\bar{c}} \tag{4}$$

în care circulația adimensionalizată $\overline{\Gamma}$ este dată de expresia $\Gamma = c(y)\ C_L(y)/2\bar{c}$, $c(y)$ este coardă locală, $\bar{c}$ coarda de referință iar b este anvergura aripii.

Avînd o viteză v_∞ și o geometrie $c(y)$ dată, pentru fiecare serie de incidente $\alpha_g(y)$ data se obține o distribuție $C_L(y) = 2\bar{c}\bar{\Gamma}(y)/c(y)$. Prin integrare numerică se determină coeficientul de portantă globală a aripii :

$$C_L = 2\int_0^1 \bar{\Gamma}(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{5}$$

unde $\eta = 2y/b$.

Efectele fuselajului și gondolelor motoarelor au fost estimate prin incidentă indusă pe linia focarelor aripii, vezi [10]. Astfel pentru gondola motorului a fost utilizat un model de cilindru de lungime echivalentă plasat înaintea aripii. Pentru fuselaj a fost utilizat modelul cilindrului infinit lung.

Curbele $C_L = f(\alpha)$ ale profilului, disponibile pentru diverse numere Re, se aproximează numeric prin polinoame de gradul patru pe intervalul de incidente ce prezintă interes. Valorile $C_{L\infty}(y, \mathrm{Re}(y), \alpha_g(y))$ și $\partial C_{L\infty}^g(y, \mathrm{Re}(y), \alpha_g(y))/\partial\alpha$, necesare în ecuația (4), se calculează utilizînd o interpolare Lagrange cu patru noduri după Re.

În urma calculelor pentru fiecare număr Re de zbor se obține o valoare a portantei maxime a avionului $C_{L\max(A)}$. Această valoare este obținută ținînd cont și de starea suprafeței aripii, vezi [9].

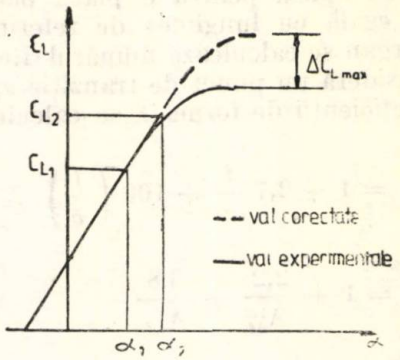
Extinderea curbei de portantă $C_L = f(\alpha)$, se bazează pe faptul că extinderea zonei de liniaritate cu creșterea numărului Re la profilul generator se reflectă și la scara tridimensională, respectiv la aripă. Explicația este simplă. Efectul anvergurii finite se manifestă printr-o scădere a incidenței efective în oricare din secțiunile aripii, față de incidenta geometrică. Ca urmare datorită predominantei caracterului bidimensional al mișcării (aripa de alungire mare), porțiunea liniară pentru profil se va extinde și pentru aripă.

Pentru extinderea curbei de portantă se procedează în modul următor :

— se calculează creșterea de incidentă $\Delta\alpha = \Delta C_{L\max}/C_{L\alpha}$ unde $\Delta C_{L\max} = C_{L\max(A)} - C_{L\max(M)}$ și $C_{L\alpha}$ este valoarea medie a pantei curbei $C_L = f(\alpha)$ pe zona cvasiliniară.
— la valoarea $C_{L_1} = C_L(\alpha_1)$, pînă la care curba experimentală este cvasiliniară, se adaugă valoarea $\Delta C_{L\max}$ și se obține $C_{L_2} = C_{L_1} + \Delta C_{L\max}$, corespunzător incidentei $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$,
— în ipoteza că variația portantei în jurul valorii α_{crit} este aceeași pe avion ca și pe machetă, se face o translație a porțiunii de curbă experimentală $\alpha > \alpha_1$ din punctul (α_1, C_{L_1}) în punctul (α_2, C_{L_2}).

Curba $C_L = f(\alpha)$ valabilă pentru numărul Re de zbor este formată din porțiunea cvasiliniară pentru $\alpha < \alpha_1$, porțiunea liniară pentru $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ și porțiunea curbă pentru $\alpha > \alpha_2$. În figura 1 este reprezentată grafic corecția de număr Re pentru polara $C_L = f(\alpha)$.

Fig. 1. — Corecția de portantă.



2.2 Corecția de rezistență la înaintare. Prima fază a acestei corecții reprezintă estimarea rezistenței minime a avionului $C_{D_0(A)}$ la numărul Re de zbor.

Se au în vedere următoarele ipoteze : rezistența minimă este funcție în primul rînd de rezistența de frecare și rezistența datorată interferențelor dintre organele avionului este mică. Aceste ipoteze sînt perfect justificate în cazul avioanelor cu fuselaj lung și aripa de alungire mare și pentru incidentele mici la care se obține rezistența minimă la care $C_L = 0$.

Principala corecție de rezistență minimă se referă la corecția de număr Re. Este binecunoscut faptul că un aport relativ important la rezistența avionului îl au diverse imperfecțiuni ale suprafeței exterioare precum și diversele excrescente precum : antene, prize de aer, faruri, reprezentate pe macheta avionului datorită numărului Re foarte mic ce poate falsifica rezultatele, vezi [3]. De aceea corecțiile de rezistență minimă cuprind și corecții datorate unor imperfecțiuni ale suprafeței exterioare precum și unor excrescențe.

Corecțiile de număr Re pentru rezistența minimă se aplică pentru fiecare organ al avionului în parte : aripa (A), fuselaj (F), ampenaj orizontal (AO), ampenaj vertical (AV) și gondole motor (GM). Astfel coeficientul de rezistența minimă, din care a fost scăzută rezistența indusă a organelor portante, poate fi pus sub forma :

$$C_{D_0} = c_{f_A} \cdot \lambda_A \frac{S_{Au}}{S} + c_{f_F} \cdot \lambda_F \frac{S_{Fu}}{S} + c_{f_{AO}} \cdot \lambda_{AO} \frac{S_{AOu}}{S} + c_{f_{AV}} \lambda_{AV} \frac{S_{AVu}}{S} +$$

$$+ n \cdot c_{f_{GM}} \cdot \lambda_{GM} \frac{S_{GMu}}{S} \qquad (6)$$

în care c_f este coeficientul de frecare pentru placa plană echivalentă, λ este un factor de formă, S_u este suprafața exterioară expusă curentului de aer, S este suprafața de referință iar n numărul de motoare.

Pentru calculul coeficientului de frecare c se utilizează o formulă bazată pe cele ale lui Blasius și Prandtl-Schlichting, vezi [4]. Această

formulă se aplică pentru o placă plană echivalentă de suprafața S și lungime egală cu lungimea de referință a organului respectiv. Pentru fiecare organ se calculează numărul Re raportat la lungimea de referință și se consideră un punct de tranziție x_T al stratului limită.

Coeficienții de forma λ se calculează cu formulele:

$$\lambda = 1 + 2{,}7\,\frac{t}{c} + 100\left(\frac{t}{c}\right)^4 \qquad \text{pentru suprafețe portante} \qquad (7a)$$

$$\lambda = 1 + \frac{2{,}2}{\Lambda_{ef}^{1.2}} + \frac{3{,}8}{\Lambda_{e,f}^{3}} \qquad \text{pentru corpuri neportante} \qquad (7b)$$

unde t/c reprezintă grosimea relativă maximă a profilului utilizat iar Λ_{ef} este alungirea efectivă a corpului, vezi [4]. Coeficienții de forma λ pentru suprafețele portante pot fi calculați mai exact pe baza datelor experimentale sau pe baza datelor obținute cu metoda interacțiunii vîscos-nevîscos aplicată profilelor în cauză, vezi [11]. Este de menționat că metodele teoretice sînt mult mai avantajoase datorită costului scăzut și în plus datorită informațiilor mult mai complete obținute: rezistența minimă, stare a stratului limită, distribuții de presiuni etc.

Funcție de numărul Re, relativ la fiecare organ în parte, vom avea un coeficient de frecare pentru un punct de tranziție x_T asumat.

Pentru a se ține cont de efectul unor excrescente și a imperfecțiunii suprafețelor exterioare (rugozitate) formula (6) poate fi scrisă sub forma:

$$C_{D0} = \left(c_{fA}\cdot\lambda_A\frac{S_{Au}}{S} + \Delta C_{DA}\right)k_A + \left(c_{fF}\lambda_F\cdot\frac{S_{Fu}}{S} + \Delta C_{DF}\right)k_F +$$

$$+\left(c_{fA0}\lambda_{A0}\frac{S_{A0u}}{S} + \Delta C_{DA0}\right)k_{A0} + \left(c_{fAV}\cdot\lambda_{AV}\frac{S_{AVu}}{S} + \Delta C_{DAV}\right)k_{AV} +$$

$$+ n\left(c_{fGM}\cdot\lambda_{GM}\frac{S_{GMu}}{S} + \Delta C_{DGM}\right)k_{GM} \qquad (8)$$

în care ΔC_D reprezinta aportul la rezistența a diverselor excrescente prezente pe respectivul organ iar factorul k este un factor ce ține cont de rugozitatea suprafeței. Valorile ΔC_D și k se calculează pentru fiecare organ în parte pentru condițiile de zbor, vezi [4].

În urma acestor calcule se obține $\Delta C_{D0} = C_{D0(A)} - C_{D0(M)}$.

Extrapolarea rezistenței la înaintare $C_D = f(\alpha)$ pentru numerele Re de zbor se face similar cu cea a portantei dar în coordonate (C_D, C_L^2) unde variația pe zona incidentelor cu mișcare nedesprinsă este cvasiliniară.

Extinderea curbei $C_D = f(\alpha)$ se face în modul următor:

— se calculează valoarea k a pantei curbei $C_D = f(C_L^2)$ pe zona cvasiliniară a portantei $C_L < C_{L_1}$ știind că pentru aripi de alungire mare variația liniară este bine verificată,

— se calculează $\Delta C_D = k \cdot (C_{L_2}^2 - C_{L_1}^2)$ și apoi se adaugă la C_{D_1} și se obține valoarea $C_{D_2} = C_{D_1} + \Delta C_D$

— se face translația porțiunii $\alpha > \alpha_1$ din curba experimentală $C_D = f(\alpha)$ din punctul (α_1, C_{D_1}) în punctul (α_2, C_{D_2}).

Corecția de rezistență la înaintare se observă cel mai bine în coordonate C_D, C_L^2, unde curba C_D este compusă din: porțiunea cvasiliniară pentru $C_L < C_{L_1}$ porțiunea liniară pentru $C_{L_1} < C_L < C_{L_2}$ și porțiunea curbă pentru $C_L > C_{L_2}$. În figura 2 este reprezentată grafic extinderea curbei experimentale $C_D = f(\alpha)$ pentru un număr Re mai mare realizat în zbor.

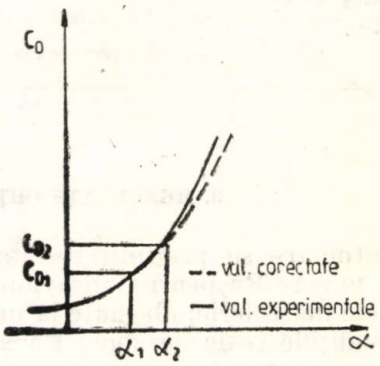


Fig. 2. — Corecția de rezistență la înaintare.

În final se face translația intregii curbe obținute $C_D = f(\alpha)$ cu valoarea ΔC_{D_0} calculată anterior la corecția de rezistență minimă, în ipoteza că C_{D_0} se obține la aceeași incidentă pe avion ca și pe machetă.

2.3 Corecția de moment de tangaj. Pe zona de incidențe la care curgerea pe aripă este atașată, curba momentului de tangaj $C_m = f(\alpha)$ și curba portantei $C_L = f(\alpha)$ sînt aproape liniare. În zona incidentelor cu mișcare desprinsă apar neliniarități pe ambele curbe. Deci extinderea zonei de liniaritate pe zona $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ a curbei de portanță îi va corespunde o extindere a zonei de liniaritate a curbei de moment.

Extinderea curbei $C_m = f(\alpha)$ se face similar cu cazul portantei și anume:

— se calculează valoarea medie a pantei $C_{m\alpha}$ pe porțiunea $\alpha < \alpha_1$;

— se calculează $\Delta C_m = C_{m\alpha} \cdot \Delta\alpha$, unde $\Delta\alpha$ este valoarea calculată la corecția de portantă;

— la valoarea $C_{m_1} = C_m(\alpha_1)$ se adaugă valoarea ΔC_m și se obține $C_{m_2} = C_{m_1} + \Delta C_m$;

— se face o translație a porțiunii de curbă experimentală $\alpha > \alpha_1$ din punctul (α_1, C_{m_1}) în punctul (α_2, C_{m_2}). Astfel curba $C_m = f(\alpha)$ valabilă pentru numărul Re de zbor este formată din porțiunea cvasiliniară pentru $\alpha < \alpha_1$, porțiunea liniară pentru $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ și porțiunea curbă pentru $\alpha > \alpha_2$. Și în cazul momentului se face ipoteza ca tipul de variație a curbei experimentale și a celei reale în jurul incidentei critice este identic.

În figura 3 este reprezentată grafic corecția de moment pentru configurația AF.

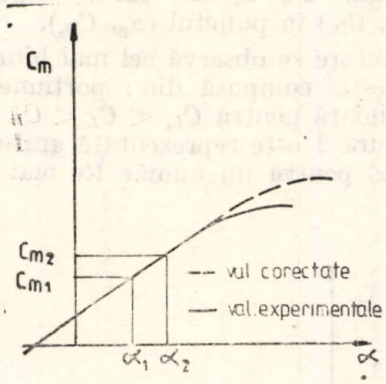


Fig. 3. — Corecția de moment de tangaj.

3. REZULTATE OBȚINUTE

În continuare se prezintă rezultatele obținute în urma aplicării corecției de număr Re pentru un avion de transport subsonic. În acest caz rezultatele de suflerie, obținute la un număr Re $\simeq 10^6$ au fost extrapolate la condițiile reale de zbor, Re $\simeq 10^8$.

Estimarea coeficientului de portanta maximă și de rezistență minimă se face în principiu pe baza rezultatelor experimentale pentru profilele generatoare ale suprafețelor portante. O alternativă reprezintă utilizarea unei metode de calcul interacțiune vîscos-nevîscos [11], pentru obținerea datelor necesare sau extrapolarea lor la numerele Reynolds și Mach necesare. Avantajele utilizării acestei metode teoretice sînt foarte mari, datorită costului scăzut și a informațiilor multiple obținute.

Prima etapă în aplicarea procedurii de corecție cu Re este cea de verificare, pe baza datelor experimentale, a valabilității ipotezelor în care a fost concepută. Acest lucru se face cu ajutorul vizualizărilor curgerii pe machete în suflerii și prin observarea atentă și analiza polarelor obținute în suflerii.

Următoarea etapă foarte importantă este cea de calibrare a metodelor de calcul. Această etapă este absolut necesară pentru obținerea pe baza modelului teoretic utilizat, a unor rezultate teoretice pentru numărul Re experimental, aproape identice cu cele experimentale. Potrivirea rezultatelor teoretice cu cele experimentale se face pe baza unor coeficienți sau variabile care reprezintă factorii principali, în cadrul modelului teoretic adoptat. Pentru estimarea portantei maxime se utilizează un coeficient care ține cont de prezența fantelor suprafețelor de comandă și a rugozității suprafeței aripii. Mărimea acestui coeficient k este dată de raportul dintre portanta maximă experimentală și cea obținută pe baze teoretice, vezi relația (5). Acest coeficient k este presupus a fi identic și pentru avion. Deci portanta maximă a avionului este $C_{L_{max(A)}} = k \cdot C_{L_{max(A)t}}$ unde $C_{L_{max(A)t}}$ este obținut teoretic pe baza metodei expuse anterior. Pentru estimarea rezistenței minime se utilizează factorul x_T, poziția punctului

de tranziție pe placa plană echivalentă. Prin asumarea unor valori pentru x_T se pot obține rezultate aproape identice cu cele experimentale. Aceste valori x_T sînt comparate cu cele obținute teoretic pentru machetă în cazul tranziției libere. Spre exemplificare variația poziției punctului x_T pentru profilul NACA 0012 funcție de nunărul Re este redată pe figura 4. Din aceasta se poate deduce importanța punctului de tranziție asupra rezistenței la înaintare. Diferențele dintre valorile calculate teoretic și cele obținute prin calibrare se explică prin existența și a altor factori importanți.

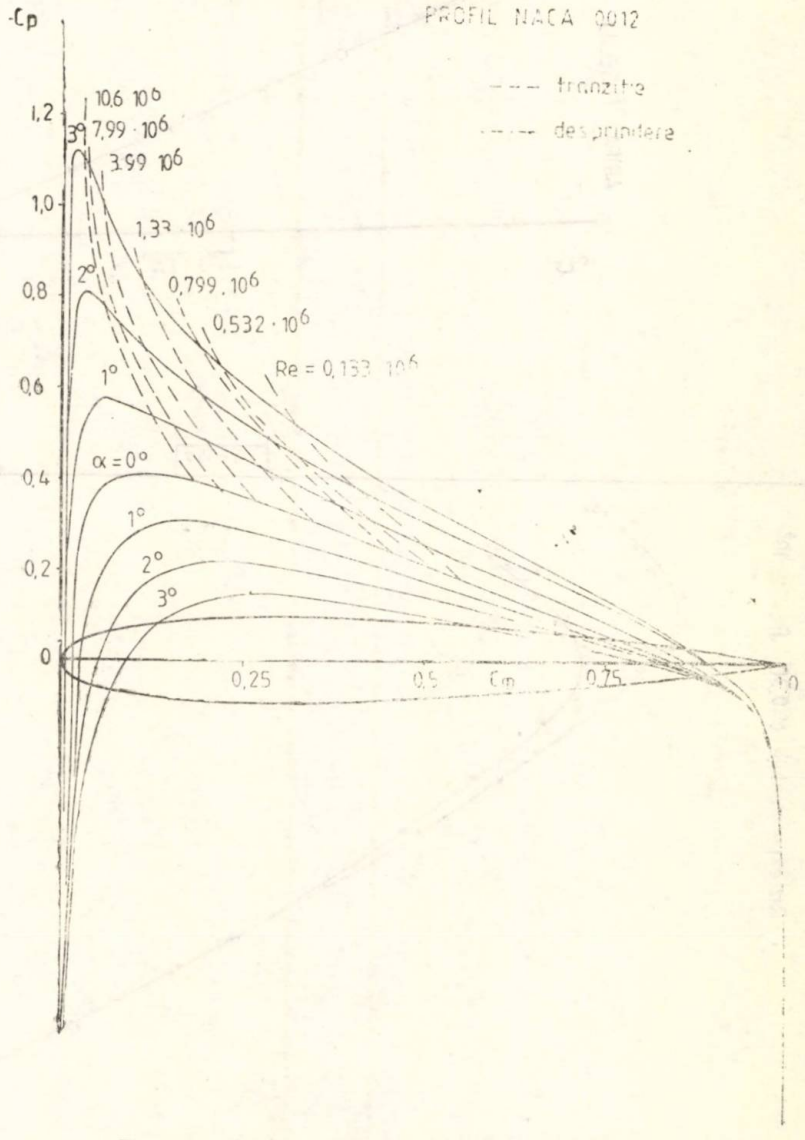
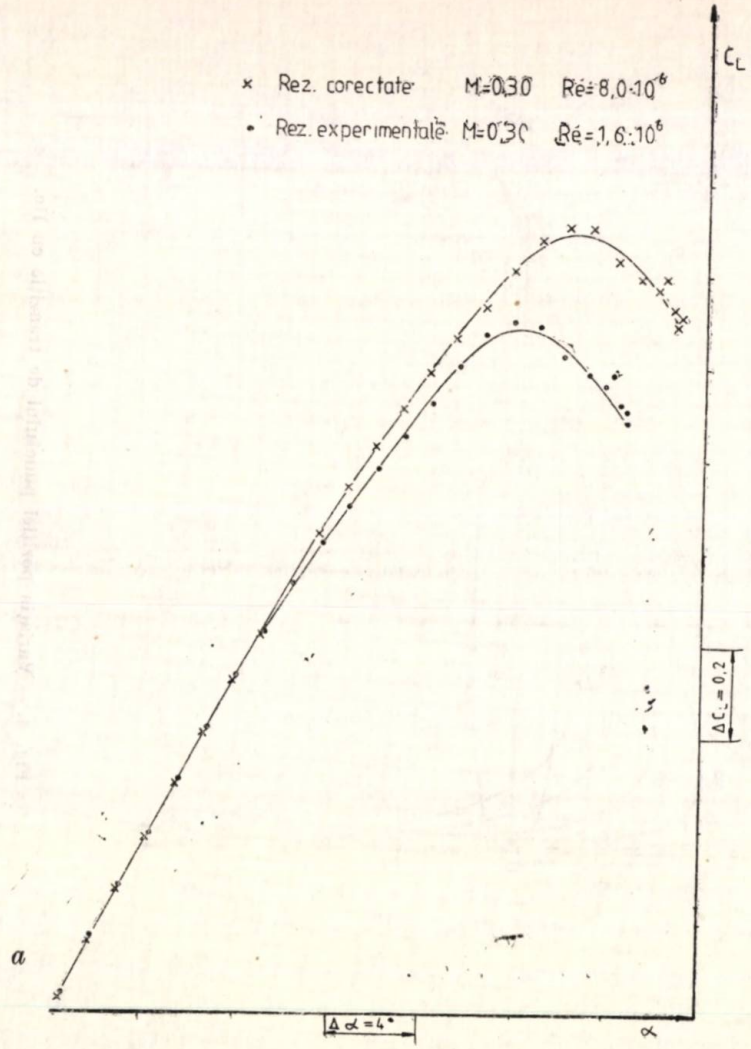


Fig. 4. — Variația poziției punctului de tranziție cu Re.



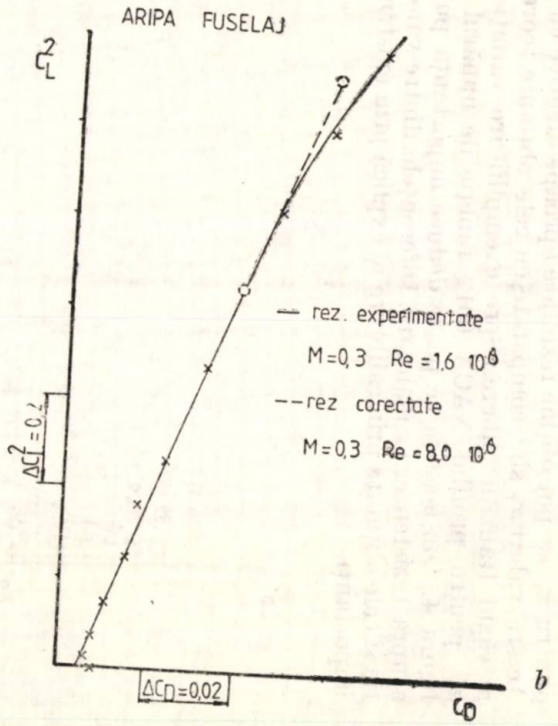


Fig. 5. — Corecția de Re configurația aripă-fuselaj.

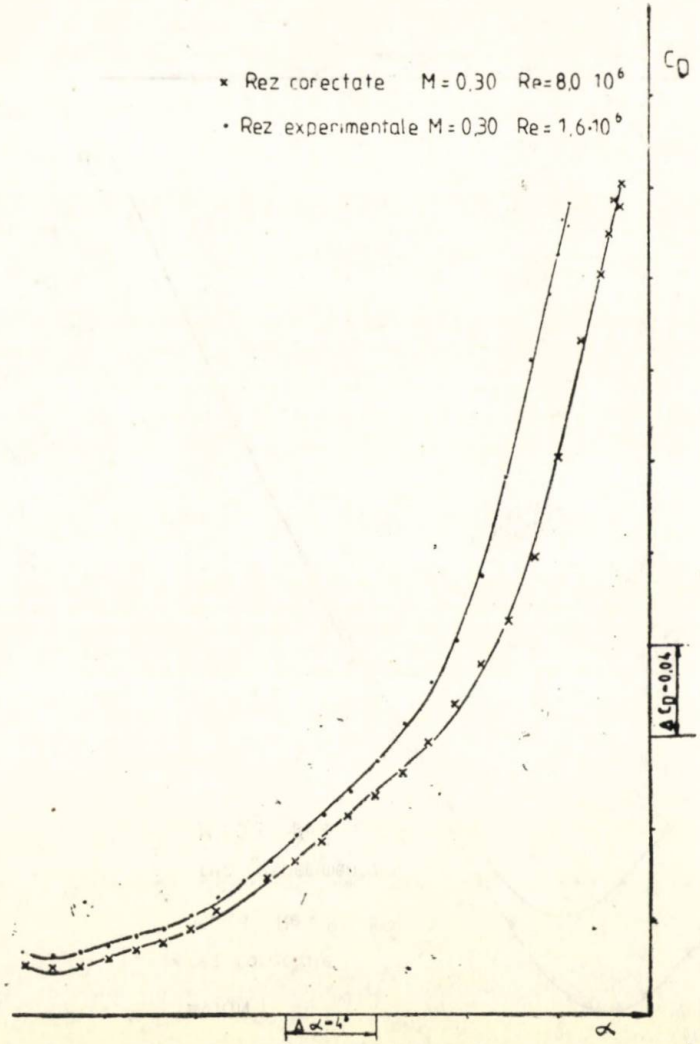

× Rez corectate M = 0,30 Re = 8,0 10⁶
• Rez experimentale M = 0,30 Re = 1,6·10⁶
c_D
$\Delta c_D = 0,04$
$\Delta\alpha = 4°$
α

Fig. 5c

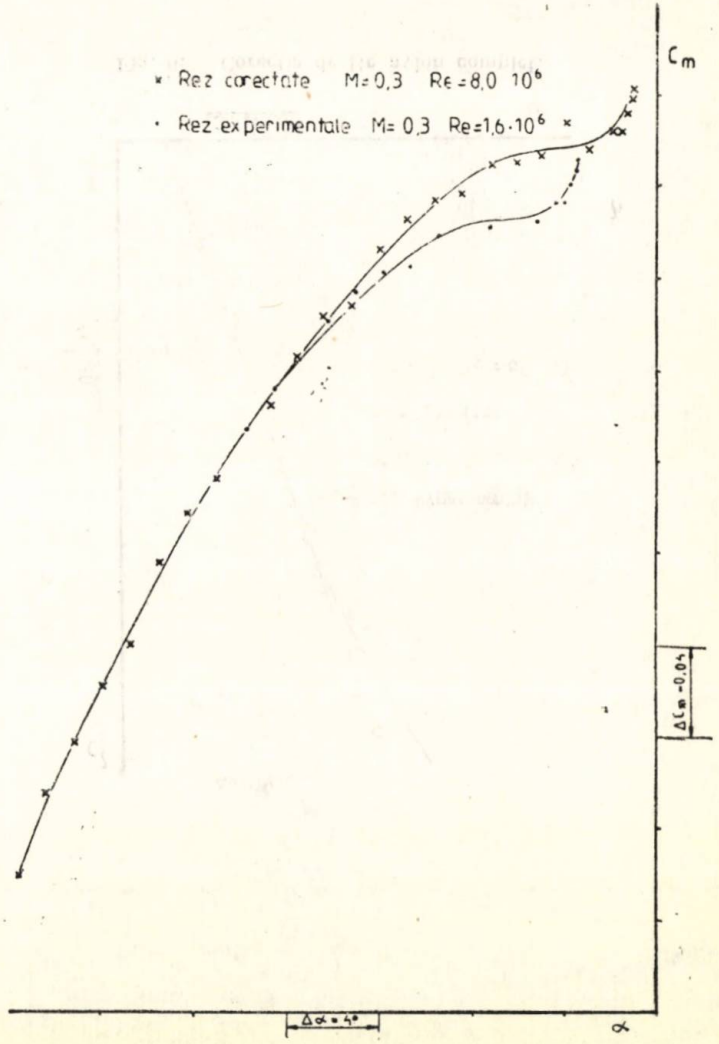

× Rez corectate M = 0,3 Re = 8,0 10⁶
• Rez experimentale M = 0,3 Re = 1,6·10⁶
c_m
$\Delta c_m = -0,04$
$\Delta\alpha = 4°$
α

Fig. 5d

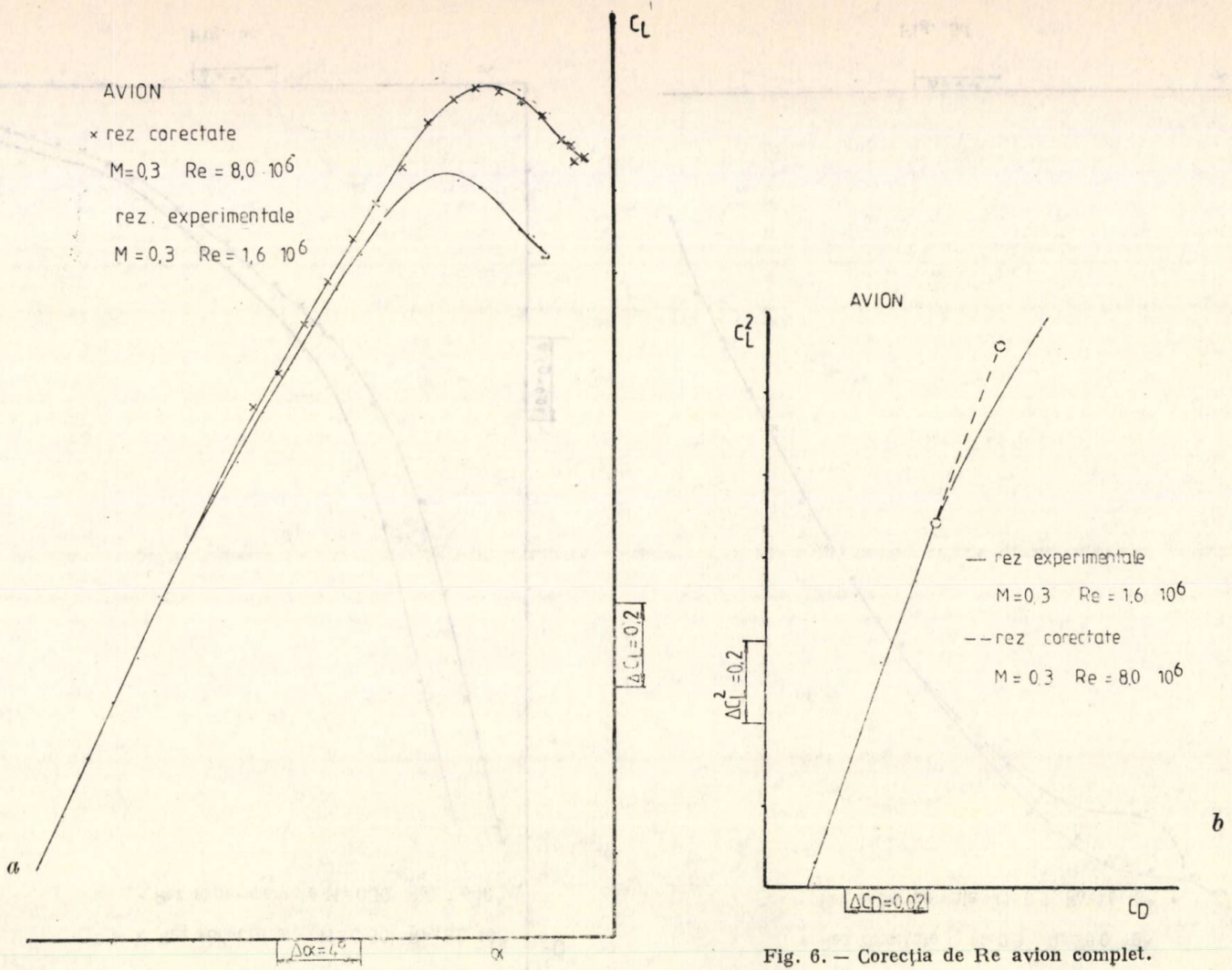


Fig. 6. — Corecția de Re avion complet.

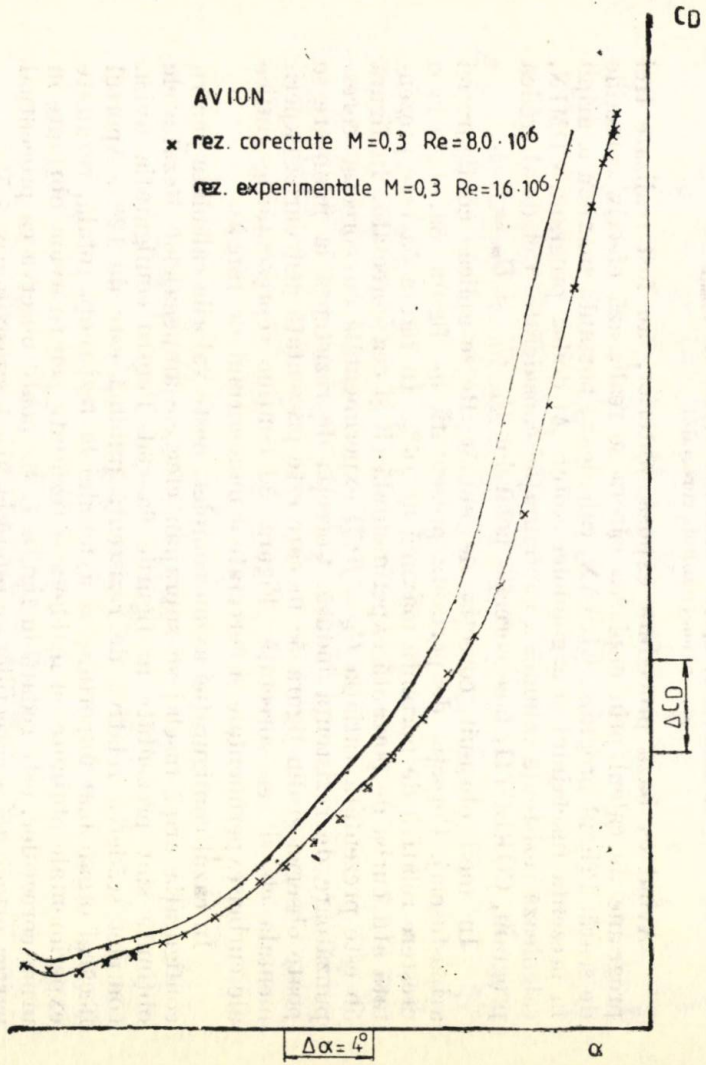

AVION
× rez. corectate M=0,3 Re=8,0 · 10⁶
rez. experimentale M=0,3 Re=1,6·10⁶
CD
ΔCD
Δα= 1°
α

Fig. 6c

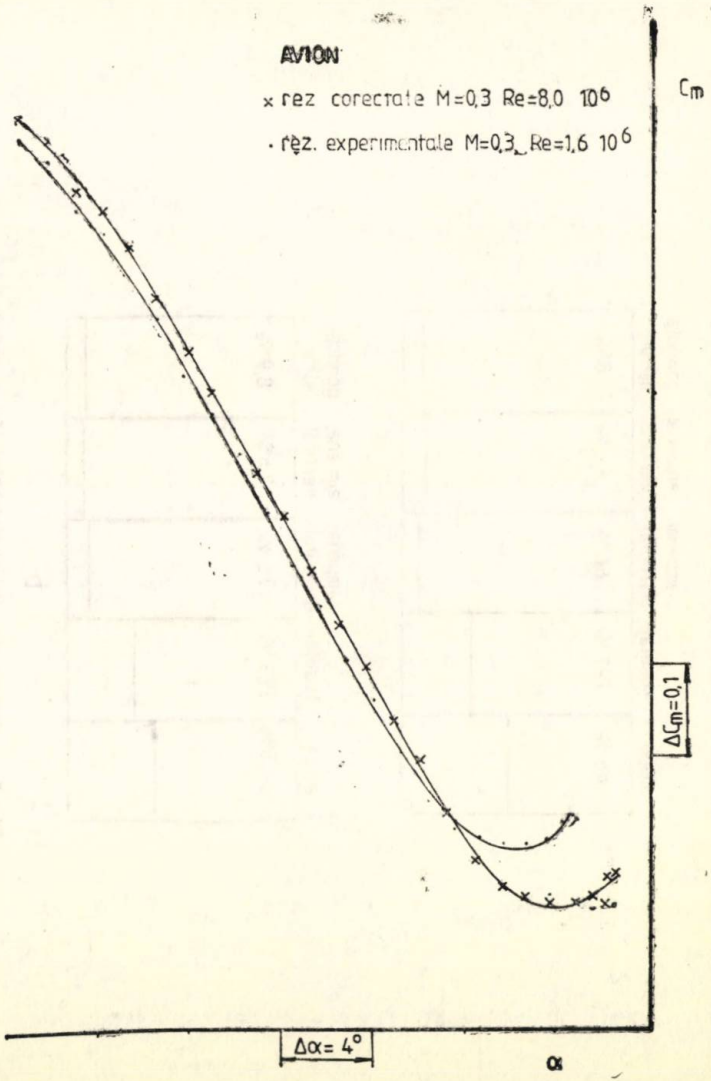

AVION
× rez corectate M=0,3 Re=8,0 10⁶
· rez. experimentale M=0,3 Re=1,6 10⁶
Cm
ΔCm=0,1
Δα= 4°
α

Fig. 6d

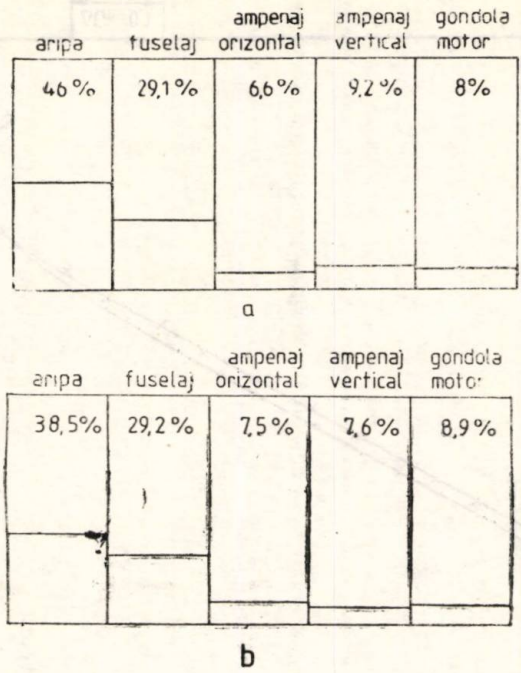


Fig. 7. — Comparație rezistență minimă; a, aportul diverselor organe la $C_{D\min}$ macheta (rezultate experimentale); b, aportul diverselor organe la $C_{D\min}$ avion (rezultate corectate).

Avînd ca bază procedura expusă anterior, au fost realizate trei programe de calcul prin cuplarea cărora se realizează efectiv corecțiile de scară. Primul program, CLMAX, calculează portanta maximă a aripii în prezența fuselajului și a gondolei motor. Al doilea program, CDMIN, calculează rezistența minimă a configurației considerate. Cel de-al treilea program, CORECȚII, face corecția polarelor C_L, C_D și $C_m = f(\alpha)$.

În mod obișnuit corecția de număr Re se aplică configurației aripă-fuselaj. Corecția de portantă prezentată în figura 5a, duce la o creștere relativă de portantă maximă de 16%. În figura 5a este prezentată atît curba de portantă experimentală cît și cea corectată. În figura 5b este prezentată variația $C_D = f(C_L^2)$ experimentală cu corecția corespunzătoare de rezistență indusă. Corecția de rezistență la înaintare se poate observa și din figura 5c în care este prezentată atît curba experimentală cît și cea corectată. Figura 5d conține reprezentările grafice ale curbei experimentale și corectate a momentului de tangaj.

În cazul configurației avion complet, peste valorile calculate pentru configurația aripă-fuselaj se suprapun efectele ampenajelor. Rezultatele obținute sînt prezentate în figurile 6a—6d. Pentru configurația avion complet scăderea relativă de rezistență minimă este de 12%. Aportul fiecărui organ mai important al avionului la rezistență totală, rezultate experimentale obținute cu macheta și rezultate pentru avion obținute în urma corecțiilor, este redată în figura 7. Se poate observa că procentual partea principală a corecțiilor se referă la aripă, aproximativ 7,5%.

4. CONCLUZII

În prezentul articol este prezentată prima procedură completă de corecție de scară [9] din țara noastră. Această procedură se poate aplica avioanelor cu configurație clasică.

Importanța aplicării procedurii rezidă din valorile corecțiilor necesare. În urma analizării figurilor 5—7 se pot trage următoarele concluzii :

1) corecția de $C_{L_{max}}$ este substanțială, aproximativ 16%, fapt important pentru performanțele avionului în fazele de aterizare-decolare,
2) corecția de C_{D_0} este și ea substanțială, aproximativ 12%, dar la condițiile de croazieră își mai pierde din importanță datorită rezistenței induse,
3) corecția de rezistență la înaintare este semnificativă la incidențe mari datorită micșorării rezistenței de formă ea luînd valori între 20 și 30%.
4) corecția de C_m este substanțială numai pentru incidente mari.

Devine astfel evident faptul că în cazul avioanelor cu configurație clasică este absolut necesară o corecție de scară dacă numărul Re realizat în zbor este mult mai mare decît cel realizat în suflerii.

Primit în redacție la 4 februarie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor viscoase în regim laminar*, Ed. Academiei, București, 1987, p. 103—110.
2. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Mc Graw-Hill Book Comp. 1960, p. 11—18, 55—57.
3. A. POPE, J. HARPER, *Low-Speed Wind Tunnel Testing*, John Wiley & S 1966, p. 378—397.
4. M. M. NIȚĂ, F. V. MORARU, R. N. PATRAULEA, *Avioane și rachete. Concepte de proiectare*, Ed. Militară, București, 1985, p. 125—133.
5. E. TORENBEEK, *Synthesis of Subsonic Airplane Design*, University Press, 1976, Delft, p. 440—445, 500—520.
6. R. ANDERSON, *Determination of the Characteristics of Tapered Wings*, NACA TR 572.
7. B. HAFTMANN, F. J. DEBBLER, H. GIELEN, *Takeoff Drag Prediction for Airbus A300—600 and A310 Compared with Flight Test Results*, Journal of Aircraft, **25**, *12* (1988).
8. S. P. FIDDES, D. KIRBY, D. WOODWARD, D. PECKHAM, *Investigation into the effects of scale and compressibility on lift and drag in the RAE 5m pressurised lowspeed wind tunnel*, Aeronautical Journal, **89**, *3* (1985).
9. V. MUȘAT, M. STOIA, *Studiul procedurilor de calcul al corecțiilor de număr Reynolds cu aplicație la polarele avionului IAR-705*, Raport INCREST, 2-AG-198, 1990.
10. V. N. CONSTANTINESCU, N. V. CONSTANTINESCU, *Aerodinamica*, vol. 1, Litografia I.P.B., 1981, p. 266—275.
11. C. DIMA, *Studiul unor profile pentru aripa avionului IAR-705*, Raport INCREST, 2-AG-193, 1990.

ASPECTE ALE MODELĂRII STRATULUI LIMITĂ AL ATMOSFEREI. II *

de ADELINA GEORGESCU

Institutul de matematică aplicată, București

4. STRAT LIMITĂ TERMIC ȘI DINAMIC

Să presupunem că în jurul unui corp imobil are loc o mișcare plană, staționară a unui fluid vîscos, incompresibil, într-un cîmp neconstant de temperatură, datorat menținerii peretelui corpului la o temperatură mai mare față de temperatura de la mari distanțe, ceea ce dă naștere unei forțe (masice) ascensionale, astfel încît problema la limită ce guvernează acest proces termodinamic devine, în coordonate adimensionale,

$$\rho(\vec{u}\,\mathrm{grad})\,\vec{u} = -\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\,\vec{g}\rho\theta + \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta\vec{u}, \tag{4.1}$$

$$\rho\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\theta = \frac{1}{\mathrm{PrRe}}\Delta\theta + \mathrm{Ec}\,\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,p + \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\Phi, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{4.3}$$

$$\vec{u}|_{\sigma\Omega} = 0, \qquad \theta|_{\sigma\Omega} = (\Delta T)_0, \tag{4.4}$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{u} = \vec{i}, \qquad \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \theta = 0, \tag{4.5}$$

în care Φ este funcția de disipație $\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$, $\theta = \dfrac{T - T_\infty}{(\Delta T)_0}$ este temperatura adimensională, T reprezintă cîmpul temperaturilor, T_∞ —temperatura de la infinit, $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$ unde T_w este temperatura peretelui corpului, vitezele au fost adimensionalizate cu viteza de la infinit $U_\infty\vec{i}$, presiunea — cu presiunea dinamică $\rho_\infty U_\infty^2$, cu $\vec{g}$ s-a notat accelerația gravitațională, Re este numărul lui Reynolds, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu c_p}{\lambda}$ —numărul lui Prandtl, μ — coeficientul de vîscozitate dinamică, λ — coeficientul de conductibilitate termică, c_p — — căldura specifică la presiune constantă, $\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta L^3 (wT)_0}{\nu^2}$ este numărul lui Grashoff, L este o lungime caracteristică a corpului, ν reprezintă

* Prima parte a acestui articol în revista Studii și cercetări de mecanică aplicată, Tom 51, nr. 1, 1992.

coeficientul de vîscozitate cinematică, β — coeficientul de dilatare de volum, iar $\mathrm{Ec} \dfrac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0}$, este numărul lui Eckert. Cînd λ este mic, într-o zonă subțire de lîngă peretele corpului, are loc o variație rapidă, în direcție normală la perete, a temperaturii fluidului în timp ce departe de corp cîmpul temperaturii este lent variabil. Această zonă se numește strat limită termic și în afara variației rapide a temperaturii este caracterizat de aceea că în el transferul de căldură prin conducție are același ordin de mărime cu transportul de căldură prin convecție. Să mai presupunem că mișcarea are loc la Re mari, astfel că în afară de stratul limită termic există și un strat limită dinamic. Să notăm cu δ_d și δ_T grosimile straturilor limită dinamic și termic. În § 3 am ales anumite dezvoltări asimptotice și mărimi adimensionale, iar apoi am arătat pe ce presupuneri fizice se baza acea alegere. Aici vom proceda invers. Astfel, vom scrie ecuațiile (4.1) — (4.3) însemnînd sub fiecare termen ordinul de mărime rezultat din presupunerea că în direcția normală la perete (Oy) avem $y \sim \delta_d$ în stratul limită dinamic, $y \sim \delta_T$ în cel termic, $\mathrm{Gr} = O(\mathrm{Re}^2)$ pentru $\mathrm{Re} \to \infty$ (ceea ce revine la a presupune că viteza mișcării este foarte mică, iar $(\Delta T)_0$ — foarte mare), θ este finită pentru $\lambda \to 0$,

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\rho\theta\cos\alpha+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.6}$$

$$1\ 1\quad \delta_d\ \frac{1}{\delta_d}\qquad 1\ 1\qquad \delta_d^2\quad 1\quad \frac{1}{\delta_d^2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\rho\theta\sin\alpha+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.7}$$

$$1\ \delta_d\quad \delta_d\ 1\qquad 1\quad \delta_d\qquad \delta_d^2\quad \delta_d\quad \frac{1}{\delta_d}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{PrRe}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)+\mathrm{Ec}\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)+ \tag{4.8}$$

$$1\ 1\quad \delta_d\ \frac{1}{\delta_T}\qquad \delta_T^2\quad 1\quad \frac{1}{\delta_T^2}\qquad 1\ 1\quad \delta_d\ \delta_d$$

$$+\mathrm{Ec}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\},$$

$$\delta_d^2\qquad 1\qquad 1\qquad \delta_d\quad \frac{1}{\delta_d}\qquad 1\qquad 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}= \tag{4.9}$$

În (4.6) am mai inclus presupunerea că forțele vîscoase au același ordin de mărime cu cele inerțiale (deoarece am ales $\frac{1}{\mathrm{Re}} \sim \delta_d^2$), iar în (4.8) pe aceea că transferul de căldură prin conducție și convecție au același ordin de mărime (ceea ce s-a exprimat prin $\frac{1}{\mathrm{PrRe}} \sim \delta_T^2$). Din $\frac{1}{\mathrm{Re}} \sim \delta_d^2$ și $\frac{1}{\mathrm{PrRe}} \sim \delta_T^2$ rezultă $\frac{1}{\mathrm{Pr}} \sim (\delta_T/\delta_d)^2$. Cum pentru aer $\mathrm{Pr} \approx 0{,}7$ rezultă că în acest gaz $\delta_T \sim \delta_d$. În lichide Pr este mai mare ca 1 (în unele cazuri chiar 1000), deci $\delta_T < \delta_d$. În sfîrșit, presupunerea că în ecuația energiei cantitatea de căldură disipată datorită vîscozității este de ordinul cantității de căldură transferată prin conducție și convecție conduce la alegerea $\mathrm{Ec} \sim 1$. Reținînd în (4.6) — (4.9) termenii de ordinul cel mai mare rezultă următoarele ecuații simplificate care furnizează prima aproximație asimptotică interioară pentru $\mathrm{Re} \to \infty$ a soluției (u, v, p, θ) a lui (4.1) — (4.5)

$$\begin{cases} \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\rho\theta\cos\alpha + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho\left(u\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + v\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{PrRe}}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \dfrac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Dispariția termenului Ec $u\,\dfrac{\partial p}{\partial x}$ din (4.8) este legată de o anumită interpretare a lui Ec. Pentru a obține formal (4.10) din (4.6) — (4.9) se introduce variabila de strat limită $\hat{y} = y\sqrt{\mathrm{Re}}$ și se dezvoltă u, v, p, T după șirul asimptotic 1, $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right)^2$, ..., u, p, și T fiind de ordinul lui 1, deci dezvoltările lor începînd cu $u_0(x, \hat{y})$, $p_0(x, \hat{y})$ și respectiv $T_0(x, \hat{y})$ în timp ce v va începe cu $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}v_0(x, \hat{y})$. Ca și în cazul pur dinamic, în cazul termic la ecuațiile (4.10) trebuie adăugate condițiile la limită la peretele solid și condițiile de racordare cu soluțiile ecuațiilor de aproximație asimptotică exterioară pe care nu le-am mai scris. Procedeul este analog, dar calculele mai complicate. Situația considerată în acest paragraf este particulară, ea implicînd de fapt, un singur parametru mic $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ legat tot

de stratul limită dinamic. Cînd $\lambda \to 0$ astfel încît $\mathrm{Pr} \to \infty$, atunci variabila asimptotică, va fi $\vec{\varepsilon} = (1/\sqrt{\mathrm{Re}}, 1/\sqrt{\mathrm{Pr}})$, iar straturile limită termic și dinamic vor fi definite [3].

5. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TURBULENT ȘI ALTE STRATURI LIMITĂ

Se poate defini de asemenea un strat limită matematic al modelului care guvernează mișcarea turbulentă a unui fluid în jurul unui corp și corespunzător, un strat limită dinamic turbulent. În cazul cel mai simplu acest model constă dintr-o problemă la limită pentru ecuațiile lui Reynolds

$$(\vec{u} \cdot \mathrm{grad})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\ \bar{p} + \nu\Delta\vec{u} + \frac{1}{\rho} \mathrm{div}\ \vec{\vec{R}}, \tag{5.1}$$

unde $\vec{\vec{R}}$ este tensorul tensiunilor turbulente ale lui Reynolds. Acest tensor se exprimă, în teoriile statistice naive ale turbulenței, cu ajutorul vitezei medii $\vec{u}$ (printr-o relație algebrică, diferențială sau integro-diferențială numită model de turbulență). Deci (5.1) este pînă la urmă un sistem diferențial în $\vec{u}$ și p și depinde, în coordonate adimensionale, de numărul lui Reynolds Re și de un alt număr legat de modelul de turbulență. De aceea se poate considera din nou problema de perturbație singulară (5.1) ca o problemă într-o varabilă asimptotică sau două astfel de variabile $(\vec{\varepsilon})$. Va apare lîngă frontiera corpului din fluid un strat limită matematic în care caracteristicile mișcării turbulente (mișcarea medie $(\vec{u}, \bar{p})$ și fluctuația reprezentată de $\vec{\vec{R}}$) vor varia rapid și vor fi descrise într-o primă aproximație asimptotică pentru $\vec{\varepsilon} \to 0$ de ecuații simplificate așa-zise ecuații ale stratului limită (dinamic) turbulent la care trebuie adăugate condiții la frontiera corpului și condiții de racordare. În același mod se poate vorbi de *strat limită compresibil*, în care o variabilă asimptotică este numărul lui Mach, un *strat limită nestaționar* în care $\vec{\varepsilon}$ poate avea o componentă ce depinde de numărul lui Strouhal etc. Modelele ce descriu fenomene chimice pot fi și ele aproximate cu modele de *strat limită chimic*. Esențial în toate aceste situații este prezența unui parametru mic $\vec{\varepsilon}$ față de care problema ce descrie fenomenul respectiv să fie problemă de perturbații singulare de tip strat limită. Ecațiile oricărui strat limită și condițiile la limită și/sau inițiale care li se atașează nu constituie un model fizic dedus direct din principiile fizice, ci ele reprezintă doar un model de aproximație asimptotică interioară a unui model fizic. Acest model trebuie considerat împreună cu perechea sa, modelul de aproximație asimptotică exterioară. Modelul exterior se poate rezolva independent de cel interior, pe cînd cel interior se poate defini numai după ce cunoaștem anumite informații asupra soluției modelului exterior.

În orice problemă de perturbații se pune în evidență parametrul mic ε și apoi se încearcă stabilirea tipului acestei probleme. Noi ne-am ocupat de un caz particular în care acest tip se determină imediat și pentru care se dispune de metode de determinare a comportamentului asimptotic al soluției pentru $\varepsilon \to 0$, comportament apriori cunoscut și anume dat

cu ajutorul a două dezvoltări asimptotice după șirul puterilor lui ε. În paragraful următor prezentăm un caz în care problema de perturbație dată depinde de ε în mod implicit, necunoscut, iar tipul comportamentului asimptotic nu se știe dinainte.

6. EXEMPLUL MODEL AL LUI LAGERSTROM

Să considerăm următoarea problemă la limită în care parametrul mic $\varepsilon > 0$ apare în condiții [5]

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + u\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [\varepsilon, \infty) \tag{6.1}$$

$$u(\varepsilon) = 0, \tag{6.2}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = 1. \tag{6.3}$$

Rezolvarea numerică directă a acestei probleme pune în evidență un comportament asimptotic de tip strat limită pentru $\varepsilon \to 0$ al soluției u: o variație lentă a lui u pentru $r \to \infty$ și una rapidă pentru $r \to \varepsilon$ (fig. 3.1). Ordinul de mărime al lui u pentru $r \to \varepsilon$ și $r \to \infty$ este diferit, deci acest comportament asimptotic nu poate fi descris cu ajutorul unei singure dezvoltări; de aceea (6.1) — (6.3) este o problemă de perturbații singulare și anume de tip strat limită în sens lărgit. Într-adevăr, făcînd schimbarea de variabilă independentă $s = \dfrac{\varepsilon}{r}$ (6.1) — (6.3) devine, notînd $u(r) = v(s)$,

$$\varepsilon\frac{d^2v}{ds^2} + r\frac{dv}{ds} - r^2v\frac{dv}{ds} = 0, \quad s \in (0,1] \tag{6.1}'$$

$$v(1) = 0, \tag{6.2}'$$

$$\lim_{s\to 0} v(s) = 1 \tag{6.3}'$$

iar problema (6.1)′ — (6.3)′ este de tip strat limită.

Problema (6.1) — (6.3) este de forma (1.1) în care T are o dependență (necunoscută și) neanalitică de ε. De aceea vom presupune că soluția sa are următoarele comportamente asimptotice necunoscute și neanalitice de ε

$$u(\varepsilon, r) \sim U_0(r) + \alpha_1(\varepsilon)\, U_1(r) + \alpha_2(\varepsilon)U_2(r) + \ldots \text{ pentru } \varepsilon\to 0 \text{ și } r \text{ fixat} \tag{6.4}$$

$$u(\varepsilon, r) \equiv \hat{u}(\varepsilon, \hat{r}) \sim \beta_0(\varepsilon)\, u_0(\hat{r}) + \beta^1(\varepsilon)\, u_1(\hat{r}) + \ldots \text{ pentru } \varepsilon \to 0 \text{ și } r \text{ fixat} \tag{6.5}$$

unde $\hat{r} = r/\varepsilon$. Termenii necunoscuți $\alpha_i(\varepsilon)$ și $\beta_i(\varepsilon)$ ai șirurilor asimptotice după care s-au făcut dezvoltările (6.4) și (6.5) se vor determina în cursul deducerii coeficienților dezvoltărilor U_i și u_i. Astfel, înlocuind dezvoltarea exterioară (6.4) în (6.1) și (6.3) obținem

$$\left(\frac{d^2U_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr}+U_0\frac{dU_1}{dr}+U_1\frac{dU_0}{dr}\right)\alpha_1(\varepsilon)+U_1\frac{dU_1}{dr}\alpha_1^2(\varepsilon)+ \tag{6.6}$$

$$+\left(\frac{d^2U_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr}+U_0\frac{dU_2}{dr}+U_2\frac{dU_0}{dr}\right)\alpha_2(\varepsilon)+\ldots=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}U_1(r)=\lim_{r\to\infty}U_2(r)=\ldots=0,\ \lim_{r\to\infty}U_0(r)=1, \tag{6.7}$$

în care $U_0(r)\equiv 1$ este soluția problemei reduse (6.1), (6.3). Dificultatea găsirii lui U_i constă în necunoașterea ordinului de mărime al diferitelor produse $\alpha_i(\varepsilon)\,\alpha_j(\varepsilon)$ ce apar din termenul neliniar $u\dfrac{du}{dr}$, de exemplu al lui α_1^2 față de α_2. Discuția celor trei posibilități $\alpha_1^2\ll\alpha_2$, $\alpha_1^2=O(\alpha_2)$ și $\alpha_1^2\gg\alpha_2$ ne va conduce atît la determinarea lui U_1 cît și a lui α_1, determinarea lui U_2, U_3, ... și α_2, α_3, ... efectuîndu-se analog. De exemplu, ipoteza $\alpha_1^2\ll\alpha_2$ conduce la $U_2=U_1$, ceea ce este inacceptabil, căci atunci $U_1\alpha_1+U_2\alpha_2=U_1(\alpha_1+\alpha_2)$, deci seria (6.4) nu mai este compatibilă, adică anumiți termeni ai săi includ termeni de ordin mai mic [1]. Presupunerea că $\alpha_1^2\gg\alpha_2$ conduce la $U_1\equiv 0$, deci o incompatibilitate cu condiția subînțeleasă că $U_i\neq 0$. Rămîne deci singura posibilitate ca $\alpha_1^2=O(\alpha_2)$ pentru $\varepsilon\to 0$. În acest caz, alegînd $\alpha_1^2=\alpha_2$ (ceea ce nu micșorează generalitatea deoarece α_i sînt definite abstracție făcînd de o constantă multiplicativă), regrupînd termenii din (6.6) corespunzător

$$\left(\frac{d^2U_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr}\right)\alpha_1(\varepsilon)+\left(\frac{d^2U_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr^2}\frac{dU_2}{dr}+\right. \tag{6.6'}$$

$$\left.+U_1\frac{dU_1}{dr}\right)\alpha_2(\varepsilon)+\ldots=0$$

și anulînd coeficienții lui α_1 și α_2 găsim respectiv

$$\frac{d^2U_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_1}{dr}+\frac{dU_1}{dr}=0, \tag{6.8}$$

$$\frac{d^2U_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_2}{dr}+\frac{dU_2}{dr}=-U_1\frac{dU_1}{dr}. \tag{6.9}$$

la care trebuie să adăugăm condițiile rezultate din (6.3) și anume

$\lim_{r\to\infty} U_1(r) = \lim_{r\to\infty} U_2(r) = 0$, ceea ce conduce la $U_1(r) = A_1 E_1(r)$, $U_2(r) = A_2 E_1(r) + A_1^2[2E_1(2r) - e^{-r}E_1(r)]$, unde $E_1(r) = \int_r^\infty e^s s^{-1}\,ds$, iar constantele reale A_1 și A_2 sînt deocamdată necunoscute. Dezvoltarea (6.4) este valabilă pentru $r \to \infty$ pentru care comportamentul asimptotic, de data aceasta în raport cu r, pentru $r \to \infty$ este dat de următoarele dezvoltări

$$U_1(r) \sim -\ln r - \gamma_0 + r + O(r^2) \text{ pentru } r \to \infty \tag{6.10}$$

$$U_2(r) \sim -(A_2 + A_1^2)\ln r - (A_2 + A_1^2)\gamma_0 - A_1^2\, 2\ln 2 - A_1^2 r \ln r + \tag{6.11}$$

$$+ [A_2 + (3 - \gamma_0) A_1^2]r + O(r^2 \ln r) \text{ pentru } r \to \infty)$$

în care $\gamma_0 = 0{,}577215\ldots$ este constanta lui Euler.

Să procedăm acum absolut analog cu seria interioară (6.5) cu singura deosebire că acum am rescris ecuația (6.1) și condiția (6.2) în coordonata $\hat{r}$. Atunci găsim problemele de primă și respectiv a doua aproximație asimptotică interioară.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_0}{d\hat{r}^2} + \dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{du_0}{dr} = 0, \quad \hat{r} \in [1, \infty) \\ u_0(1) = 0, \end{cases} \tag{6.12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u^1}{d\hat{r}^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_1}{d\hat{r}} = -u_0\dfrac{du_0}{d\hat{r}}, \ \hat{r} \in [1, \infty) \\ u_1(1) = 0, \end{cases} \tag{6.13}$$

ale căror soluții sînt $u_0(\hat{r}) = B_0 \ln\hat{r}$, $u_1(\hat{r}) = B_1 \ln\hat{r} - B_0^2(\hat{r}\ln\hat{r} - 2\hat{r} + 2)$ în care B_0 și B_1 sînt constante încă necunoscute. Pentru determinarea lor am putea încerca aplicarea principiului de racordare 1×1 dar aceasta este imposibil deoarece $\lim_{\hat{r}\to\infty} u_0(r) = \infty$. De aceea Lagerstrom a folosit un principiu de racordare intermediară prin introducerea unei variabile independente intermediare $r_\eta = \dfrac{r}{\eta(\varepsilon)}$, unde $\eta(\varepsilon)$ este o funcție de ε, astfel încît $\varepsilon \ll \eta \ll 1$, $\lim_{\eta\to 0} \dfrac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$, $r = \eta r_\eta$, $\hat{r} = \dfrac{\eta}{\varepsilon} r_\eta$, $\lim_{\varepsilon\to 0} r = 0$ și $\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{r} = \infty$ pentru r_η fixat. Deci r_η a fost definit în zona intermediară dintre stratul limită de lîngă $r = 0$ și regiunea de la mari distanțe $r \to \infty$, zonă în care $r \to 0$, iar $\hat{r} \to \infty$. Stratul limită se întindea pe o grosime de ordinul $O(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \to 0$ pe cînd zona intermediară se întinde dincolo de frontiera exterioară a stratului limită, deoarece în acea zonă $r = O(\eta)(\varepsilon)$

pentru $\varepsilon \to 0$, iar $\eta \gg \varepsilon$. Cele două dezvoltări (6.4) și (6.5), rescrise în variabila r_η vor fi acum racordate după un al treilea șir asimptotic $\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots\}$ pentru $\varepsilon \to 0$ de asemenea necunoscut. Aceasta revine la a scădea primii k_1 termeni ai dezvoltării interioare din primii k_2 termeni ai dezvoltării exterioare, apoi la împărțirea diferenței la δ_k și trecerea la limită pentru $\eta \to 0$ și r_η fixat. Nu știm dinainte cît trebuie luat k_1 și k_2, ci prin încercări se aleg k_1 și k_2 de la 1,2,... pînă ce se obțin rezultate necontradictorii. De exemplu pentru $k = 0$ alegem $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, racordarea pînă la termeni de ordinul lui $\delta_1 = 1$, revenind la

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ r_\eta \text{ fixat}}} \frac{1 + \alpha_1(\varepsilon) U_1(\eta r_\eta) - \beta_0(\varepsilon) u_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon} r_\eta\right)}{1} = 0. \tag{6.14}$$

Înlocuind în (6.14) dezvoltările (6.10) și (6.11) găsim

$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ r_\eta \text{ fixat}}} \{1 + O(\alpha_1 \ln \eta) - \beta_0 B_0 \ln (1/\varepsilon) + O(\beta_0 \ln \eta)\} = 0$ de unde rezultă $B_0 = 1$ și $\beta_0(\varepsilon) = (\ln \varepsilon^{-1})^{-1}$. Ținînd seama de aceste expresii racordarea pînă la termeni de ordinul lui $\delta_1(\varepsilon)$ revine la

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ r_\eta \text{ fixat}}} \frac{1}{\delta_1(\varepsilon)} \left[1 + \alpha_1 U_1(\eta r_\eta) + \alpha_1^2 U_2(\eta r_\eta) + \ldots - \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} u_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon} r_\eta\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)} u_1\left(\frac{\eta}{\varepsilon} r_\eta\right) + \ldots \right] = 0, \tag{6.15}$$

în care $k = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. δ_1 va fi ales astfel ca $\alpha_1(\varepsilon)/\delta_1(\varepsilon) \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$ în care caz rezultă $\alpha_1(\varepsilon) = (\ln \varepsilon^{-1})^{-1}$ și $A_1 = -1$. Cum dezvoltarea interioară nu conține termeni de ordinul lui $\alpha_1(\varepsilon)$ corespunzători termenului $-A_1 \gamma_0 \alpha_1(\varepsilon)$ din dezvoltarea exterioară, între u_0 și u_1 vom introduce un termen $B^+ \ln \hat{r} \ln^{-2} \varepsilon^{-1}$ și vom impune racordarea pînă la termeni de ordinul lui δ_2 luînd $k_1 = 2$ și $k_2 = 3$, ceea ce conduce la $B^+ = -\gamma_0$ și $A_2 = \gamma_0^{-1}$. Racordarea va continua în același mod în cursul său rezultînd diferitele constante (rămase arbitrare în expresiile lui U_i și u_i) și α_i, β_i și δ_i.

Acest procedeu de racordare intermediară este dificil (ține seama de toate posibilitățile), dar este singurul utilizabil. Deoarece se dispune de o reprezentare integrală a soluției lui (6.1) — (6.3) se constată că seriile obținute din soluția exactă sînt aceleași cu cele găsite folosind acest procedeu.

Exemplul analizat arată importanța punerii în evidență a parametrului mic ε și folosirea unei metode (mai generală decît cea a dezvoltărilor interioare și exterioare) de studiu asimptotic al problemelor de tip strat limită care nu depind analitic de ε.

7. BAZE TEORETICE PENTRU DEDUCEREA MODELULUI MATEMATIC AL CURGERII ÎN STRATUL LIMITĂ ATMOSFERIC

În acest paragraf analizăm din punct de vedere al teoriei aproximației asimptotice una dintre lucrările teoretice de referință în teoria stratului limită atmosferic scrisă de A. K. Blackadar și H. Tenneckes în anul 1968, apărută sub titlul „Asymptotic similarity in neutral barotropic planetary boundary layers" în J. Atmos. Sci., vol. 25, nr. 6, pp. 1015—1020, reformulînd corespunzător anilor 1988 considerațiile din articol pe baza noilor rezultate pe care teoria perturbației le-a obținut în ultimii 20 de ani și legînd modelul corespunzător de cele din mecanica fluidelor.

Pentru a studia mișcarea atmosferei în stratul Ekman (definit ca zona de lîngă Pămînt în afara căreia fluxurile verticale turbulente sînt, în primă aproximație, se presupune că această mișcare este staționară, bidimensională, are loc în regim turbulent, în același timp fiind un proces adiabatic. Materialul fluid este definit de 4 ecuații constitutive : 1° cea reologică care leagă tensorul tensiunilor de cel al vitezelor de deformație. La noi această ecuație este $\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}}$, deci fluidul ideal este nevîscos, 2° cea care leagă fluxul de căldură prin suprafață și temperatura (și care de obicei este legea lui Fourier). În modelul pe care-l analizăm această ecuație constitutivă se reduce la egalitatea cu zero a fluxului de căldură și deci la coeficient de conductibilitate termică nul ; 3° ecuația constitutivă pentru energia internă și 4° ecuația constitutivă pentru entropie. Pe acestea din urmă nu le vom lua în considerație deoarece ne va interesa ecuația de impuls și nu tot modelul matematic care mai conținea ecuația de continuitate, ecuația energiei interne totale și cea a entropiei.

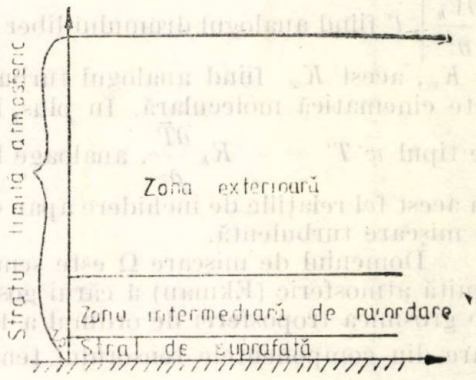


Fig. 1

Se va face ipoteza că în modelul de turbulență vor apare o frecare turbulentă și o conducție turbulentă în prezența cărora frecarea vîscoasă (moleculară) și conducția sînt mici și se neglijează.

Ecuațiile constitutive trebuie completate cu ecuațiile de stare termodinamică, energetică și entropică ce definesc anumite constante din ecuațiile constitutive. În cazul nostru este necesară doar specificarea ecuației de stare termodinamică, adică legătura dintre p, ρ și T. Vom presupune că fluidul atmosferic este baratrop, adică $p = p(\rho)$ și, în același timp, gaz ideal supus legii gazelor perfecte $p = R\rho T$.

În teoria turbulenței există trei modelări distincte : modelele naive bazate pe ecuația lui Reynolds în care mediile sînt temporale (notate cu o bară deasupra), modelele stocastice clasice și modelele stocstice de tip

Hopf și Foiaș-Prodi. În modelele naive este necesară completarea ecuațiilor lui Reynolds cu ajutorul așa-numitelor relații de închidere. Unele dintre acestea leagă tensorul tensiunilor turbulente de anumite mărimi caracteristice mișcării medii prin așa-numitele modele de turbulență (§ 5). Noi folosim modelul lungimii de amestec al lui Prandtl care este oarecum un analog turbulent al ecuației reologice 1° și o ecuație care leagă fluxul turbulent al unei mărimi (e.g. temperatura) de gradientul vertical al mărimii medii corespunzătoare. În acest fel introducem un analog al lui 2°, deși aici nu va mai fi vorba de un flux de căldură, ci de o medie temporală a produselor componentelor fluctuației vitezei cu fluctuația temperaturii. Mai exact scriem $\rho\overline{u'w'} = A_z \frac{\partial \bar{x}}{\partial z'}$ $\rho\overline{v'w'} = -A_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$, $(A_z \equiv l'^2 \left|\frac{\partial V_h}{\partial z}\right|$, l' fiind analogul drumului liber mijlociu molecular) și notăm $A_z/\rho \equiv \equiv K_m$, acest K_m fiind analogul turbulent al coeficientului ν de vîscozitate cinematică moleculară. În plus, în ecuația energiei vor apare relații de tipul $\overline{w'T'} = -K_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$, analoage legii $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ a lui Fourier. În acest fel relațiile de închidere apar ca relații constitutive pentru fluidul în mișcare turbulentă.

Domeniul de mișcare Ω este semispațiul $z \in [0, h]$ ocupat de stratul limită atmosferic (Ekman) a cărui gosime este de ordinul a 1000 m față de grosimea troposferei de ordinul a 10.000 m. Ecuațiile lui Reynolds în care din componentele tensorului tensiunilor turbulente reținem $\overline{u'w'}$ și $\overline{v'w'}$ se scrie ca

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= f\bar{v} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + K_m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \\ \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -f\bar{u} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + K_m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \end{aligned}\right\} (x, y, z) \in \Omega, \qquad (7.1)$$

unde $u_g \equiv -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}$, $v_g \equiv \frac{1}{\rho f}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ se consideră a fi componentele cunoscute ale vîntului geostrofic $\vec{G}$ de modul $G = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}$, care constituie o aproximație asimptotică de ordin întîi pentru mișcarea exterioară stratului Ekman). f este parametrul lui Coriolis, de asemenea cunoscut. În aproximația borotropică $\bar{u}$ și $\bar{v}$ depind în principal de z, ceea ce implică anularea identică a termenilor inerțiali și satisfacerea identică a ecuației de continuitate. Faptul că în ecuațiile (7.1) dintre componentele tensiunii turbulente, apar doar cei ce implică un gradient vertical constituie indiciul că ecuațiile (7.1) reprezintă o aproximație de tip strat limită a ecuațiilor lui Reynolds, ceea ce îndreptățește presupunerea că densitatea (și, deoarece $p = p(\rho)$, de asemenea presiunea) este constantă pe acest strat, presupunere pe care o vom adopta și noi în cele ce urmează. În

aceste condiţii (7.1) devine

$$\begin{cases} f(\bar{v}-v_g)=K_m\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}, \\ \\ f(\bar{u}-u_g)=K_m\dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}, \end{cases} \quad (x, y, z)\in\Omega \qquad (7.1)'$$

unde $\Omega=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<z<h\}$. Pentru a include şi alte modele de turbulenţă în loc de $K_m\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}$ şi $K_m\dfrac{\partial^2\bar{v}^2}{\partial z^2}$ vom scrie mai general $\dfrac{\tau_x}{\rho}$ şi respectiv $\dfrac{\tau_y}{\rho}$ care vor desemna componentele respective ale tensorului tensiunilor turbulente, astfel că în loc de (2.1)′ vom considera

$$f(\bar{v}-v_g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\tau_x}{\rho}\right), \quad f(\bar{u}-u_g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\tau_y}{\rho}\right), \quad 0<z<h \qquad (7.2)$$

la care ataşăm condiţiile la limită

$$\lim_{z\to\infty}\tau_x(z)=\rho u_x^2, \lim_{z\to\infty}\tau_y(z)=0, \qquad (7.3)$$

$$\bar{u}(z_0)=\bar{v}(z_0)=0, \qquad (7.4)$$

unde z_0 este lungimea rugozităţii suprafeţei Pămîntului şi este foarte mică, astfel încît numărul lui Rossby $\mathrm{Ro}=G/(fz_0)$ este foarte mare. Deşi problema (7.2) — (7.4) este ca însăşi o problemă de primă aproximaţie interioară, ea poate fi privită şi ca problemă de perturbaţii singulare de tip strat limită datorită apariţiei parametrului mic z_0 într-un mod neexplicit în condiţiile la limită (7.4), analog situaţiei din problema lui Lagerstrom, deşi în cazul lui Lagerstrom analogul lui $z=z_0$ era chiar frontiera domeniului pe cînd aici $z=z_0$ este o suprafaţă interioară acestuia. De aceea lîngă suprafaţa Pămîntului $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ vor avea un comportament asimptotic pentru $R_0\to\infty$, diferit de cel din regiunea depărtată de această suprafaţă. Vom numi stratul limită matematic de lîngă suprafaţa Pămîntului drept *strat de suprafaţă*, iar zona cu $z\gg z_0$ (dar încă din stratul Ekman)-strat Ekman exterior. Pentru numere Rossby cuprinse între 10^5 şi 10^8 stratul de suprafaţă are grosimea de ordinul zecilor de cm. Între acestea se va găsi un strat intermediar în care se va face racordarea comportamentului asimptotic interior al lui $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ din stratul de suprafaţă cu cel exterior din stratul exterior. Necunoaşterea dependenţei explicite de z_0 a operatorului ce defineşte problema de perturbaţii singulare (7.2)—(7.4) implică necunoaşterea şirurilor asimptotice după care să se facă dezvoltările interioare, şi exterioare. Aceasta se traduce prin necunoaşterea ordinului de mărime al vitezelor caracteristice u_x în stratul de suprataţă faţă de cel al vitezelor W cu care se face adimensionalizarea în stratul exterior, al mărimilor caracteristice pentru τ_x şi τ_y în funcţie de u_x şi W, al grosimii h a întregului strat limită atmosferic faţă de z_0, a intensităţii vîntului geostrofic G faţă de z_0 şi a lui f faţă de z_0.

Într-un mod indirect se obţin anumite informaţii impunîndu-se condiţia ca în stratul de suprafaţă ecuaţiile de impuls şi cea a energiei să-şi păstreze toţi termenii, deci aceşti termeni să aibă acelaşi ordin de mărime. (De exemplu (7.2) se scrie echivalent ca $F_x = \frac{u_*^2}{Wf}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}t_x}{\mathrm{d}z/h} \quad h \sim \frac{u_*^2}{fW}$). Se face apoi racordarea, în zona intermediară, nu a unor serii asimptotice, ci a unor funcţii de $\hat{z} = z/z_0$ şi z/h prin care se exprimaseră $\frac{\bar{u}}{u_x}$ şi $\frac{\bar{u}}{w}$ în zona interioară şi exterioară, racordarea constînd din egalitatea funcţiilor şi a primelor lor derivate. Să observăm că parametrul mic al problemei era $\frac{z_0}{h}$ în care caz adimensionalizarea lungimilor trebuia făcută uniform cu h, dar $\hat{z} = \frac{z}{h}\cdot\frac{1}{\varepsilon}$. Se găseşte că $W \sim u_x$, un lucru foarte important în aceste studii.

8. TEORIA GENERALĂ A STRATULUI LIMITĂ ATMOSFERIC

O teorie generală a stratului limită atmosferic trebuie să aparţină teoriei numită dinamica atmosferei, aceasta din urmă interferînd în mare parte cu mecanica clasică a fluidelor; uneori dinamica atmosferei este considerată chiar o ramură a mecanicii fluidelor. Mai potrivită este încadrarea dinamicii atmosferei în termodinamica modernă a proceselor departe de echilibru în care se include în mod natural şi mecanica fluidelor. vom enumera mai jos cauzele care fac ca mecanica clasică a fluidelor să nu fie suficientă pentru cerinţele actuale ale studiului atmosferei şi în particular al stratului limită din vecinătatea Pămîntului; menţionăm că am discutat aceste cauze cu mai mulţi cercetători din JMH (fizician Călin Vamoş, fizician Mihai Ghizdaru şi dr. mat. Ion Drăghici, cărora pe această cale le aducem mulţumirile noastre).

În primul rînd atmosfera este un fluid „geofizic" supus diferitelor influenţe astronomice (printre care se numără şi influenţele terestre). Acest fluid este un amestec de gaze a căror concentraţie variază cu, altitudinea. El conţine apă în cele trei stări de agregare (vapori, apă lichidă, ghiaţă), aerosoli (suspensii ca: praf, alte particule, poluanţi), ozon. Aceasta necesită considerarea fluidului atmosferic, atît ca fluid micropolar cît şi multifazic. Avînd loc şi tranziţii de fază (de tip schimbare de stare de agregare), rezultă că în acele situaţii fluidul din atmosferă este de asemenea un fluid nenewtonian. Asupra mişcării atmosferei acţionează cîmpul magnetic terestru, forţele de inerţie sînt datorate mişcărilor Pămîntului. (Astfel, menţionăm forţa centrifugă, care împreună cu cîmpul gravitaţional formează cîmpul gravic-$\vec{g}$, forţa lui Coriolis (fluidul fiind în mişcare rapidă) şi forţe mareice datorate Lunei şi Soarelui), o influenţă o manifestă şi forma sferică a Pămîntului, neomogenităţile suprafeţei Pămîntului (relief, repartiţia uscatului şi oceanului, cu un cuvînt orografia), radiaţia electromagnetică a Soarelui, cîmpul magnetic şi electric terestru, vîntul solar, vulcanii, cometele, meteoriţii, radiaţia cosmică etc. Aceasta arată ce importanţă deosebită are pentru dinamica atmosferei ecuaţia energiei în care se ţine seama de toate aceste radiaţii şi cît de

multe forțe apar în ecuațiile de impuls. Atît componența atmosferei, cît și diferitele influențe exterioare variază puternic cu înălțimea, în diferitele straturi ale atmosferei avînd loc procese termodinamice distincte. Astfel, troposfera este zona din atmosferă aflată sub influența termică a solului ajungînd pînă la aproximativ 10 km. Deci stratul limită atmosferic se află în partea cea mai de jos a troposferei, ocupînd pînă la o zecime din ea; grosimea acestui strat variind de la zi la noapte. De exemplu, în condiții de stabilitate, noaptea el ajunge la circa 100 m, în schimb ziua și în condiții de instabilitate puternică grosimea stratului limită atmosferic depășește un kilometru. După troposferă urmează o zonă — tropopauza — care este foarte subțire față de troposferă și apoi stratosfera, definită ca zonă din atmosferă aflată sub influența termică a ozonului. Dinamica atmosferei studiază în principal curgerile din troposferă deși în sens larg ea le privește și pe cele din stratosferă. În afara stratului Eckman viteza aerului (vîntul geostrofic) este de aproximativ 10 m/sec. Dacă ținem seama că în troposferă lungimile caracteristice (care sînt diferite pe verticală față de acelea în direcția orizontală), sînt între 10^4 m și 10^6 m și că $\nu \sim 1{,}5 \times 10^{-5}$ m^2/s rezultă că $Re \sim 4 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 10^{12}$ deci în acea zonă mișcarea atmosferei este turbulentă. În plus în ea este foarte importantă influența temperaturii. Mișcarea medie a fluidului din troposferă se numește circulație generală, troposfera putînd fi considerată drept o mașină termică ce asigură transportul căldurii, provenite de la Soare, dinspre ecuator spre poli, gradientul termic ecuator — poli variind cu anotimpul și anume fiind mai mare iarna. Mișcarea aleatoare a troposferei este caracterizată de prezența structurilor coerente foarte diverse ca dimensiune și formă.

Pe orizontală deosebim patru lungimi caracteristice care definesc așa-zisele scări, deosebite de scările din turbulența clasică sau de scara continuumului. Aceste lungimi sînt dimensiunile domeniului de mișcare în care se detectează anumite tipuri de mișcări. Scara planetară este situată între 4000 km și 40.000 km, tipurile de mișcări la această scară fiind undele planetare, jetul și mareele și diferind după momentul anului. Probabil că modelul cel mai potrivit pentru descrierea acestor mișcări este problema Navier-Stokes generalizată din tranziția laminar-turbulent. Scara imediat următoare este cea sinoptică, avînd lungimea caracteristică a fenomenului de mișcare a atmosferei situată între 1000 km și 4000 km. Astfel de mișcări sînt așa-numitele structuri coerente care la latitudini medii sînt ciclonii și anticiclonii, iar la Ecuator — uraganele, undele estice etc. Se pare că aceste mișcări sînt preturbulente, ele fiind considerate ca avînd caracteristici de turbulență cvasigeostrofică (Charney). Mezoscara este cuprinsă între 10 km și 1000 km, mișcările corespunzătoare ei prezentînd fronturi, linii de instabilitate curgeri forțate de relief și posibil turbulente. Scara locală este cea de sub 10 km și este de interes deosebit pentru meteorologia urbană și studiul poluării.

Existența acestor scări pune mecanicii fluidelor probleme de fundamente mai diferite decît cele ale turbulenței clasice. Ele vizează cele mai profunde dintre conceptele de bază ale mecanicii fluidelor cu implicații cruciale în alegerea unui model matematic sau a altuia, modele cu predicții foarte diferite. Fără o justificare plauzibilă este subînțeleasă ipoteza curgerii turbulente a atmosferei și ca atare este folosit modelul lui Rey-

nolds şi relaţii de închidere dintre cele mai simple. Modelul lui Reynolds este cel mai simplu dintre aşa-zisele modele naive ale turbulenţei şi ca şi acestea, trebuie completat cu relaţii de închidere, actualmente existînd o mare diversitate de astfel de relaţii. Modele mai evoluate sînt cele stochastice şi mai recent modelele de tip Hopf şi Foiaş-Prodi. Acestea din urmă sînt cele mai potrivite unei abordări unitare a curgerii indiferent de regim, dar mai ales care să fie valabile în tranziţie. Descrierile de mai sus cer, după părerea noastră, astfel de modele. În plus, ele sînt legate de haosul determinist, idee centrală a ştiinţei moderne conform căreia sisteme dinamice (chiar dintre acele mai simple) deterministe posedă intrinsec comportament haotic, preturbulent şi apoi turbulent, fără adaos de influenţă aleatoare exterioară sistemului. Cel mai celebru astfel de sistem este cel al lui Lorenz care reprezintă unul dintre modelele ce guvernează mişcarea atmosferei. Acest sistem este caracterizat şi de aceea că nu permite o predictibilitate pe timp lung, problemă mult discutată acum în era calculatoarelor. Trasarea zilnică a hărţilor, urmărirea structurilor coerente şi calculul numeric direct sînt principalele tipuri de investigaţie în dinamica atmosferei. Exemplul lui Lorentz a atras atenţia că *modelele matematice complicate ale acestei teorii nu pot fi investigate numeric satisfăcător, nu din cauza capacităţii reduse a calculatoarelor, ci datorită faptului că ecuaţiile însele nu permit acest lucru. De aceea în ultimul timp se recunoaşte importanţa crucială a modelării matematice în meteorologie şi a investigării riguroase a problemelor matematice ataşate.* În acest cadru teoria cadrului limită atmosferic oferă o aproximaţie riguroasă de un tip special legat de ordinul de mărime al funcţiilor din aceste probleme. Metodele teoriei perturbaţiei mai degrabă decît teoria stratului limită însăşi sînt de mare utilitate în meteorologie, unde prezenţa multor influenţe şi deci parametri face inoperantă o abordare analitică standard.

Această lucrare stabileşte punctele principale prin care o tratare fundamentală la nivelul anilor 68 a aproximaţiei asimptotice în stratul limită atmosferic poate fi efectuată cu ajutorul metodelor recente ale teoriei perturbaţiilor singulare. Efectuarea acestui studiu implică o reconsiderare şi adîncire a bazelor teoretice ale aproximaţiilor utilizate în teoria stratului limită atmosferic, o cunoaştere a teoriei aproximaţiei asimptotice, a turbulenţei şi sistemelor dinamice. Acestea trebuie conjugate cu informaţii amănunţite privind ordinul de mărime ale diferiţilor termeni ai ecuaţiilor primitive ale dinamicii atmosferei şi a unor ecuaţii mai generale şi complete decît acestea care să ţină seama de factorii semnalaţi.

Primit în redacţie la 26 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. ADELINA GEORGESCU, *Aproximaţia asimptotică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1989.
2. C. VAMOŞ, ADELINA GEORGESCU, *Aproximaţia cvazigeostrofizică* (părţi ale acestei lucrări au fost prezentate la o sesiune de comunicări a IMH în 1987).
3. H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, Pergamon Press, London, 1955.
4. I. DRĂGHICI, *Efecte Coriolis nehidrostatice într-o formulare a unui model atmosferic într-o coordonată izentropică*, Colocviul de mecanica fluidelor şi aplicaţiile ei tehnice, Suceava, 1987.
5. J. KEVORKIAN, J. D. COLE, *Perturbation methods in applied mathematics*, Applied Mathematical Sciences, **34**, Springer-Verlag, New York, 1981.

DISTRIBUȚIA PRESIUNII ȘI A FORȚELOR AFERENTE ÎNTR-UN LAGĂR RADIAL GAZODINAMIC

de I. CRISTESCU, M. PECULEA și IOANA ȘERBAN

Institutul de criogenie și separări izotopice, Rîmnicu Vîlcea

În lucrare se prezintă deducerea și rezolvarea ecuației ce descrie variația presiunii în filmul de gaz al unui lagăr radial gazodinamic precum și modul în care caracteristicile lagărului influențează stabilitatea mișcării. În finalul lucrării calculul este particularizat pentru un lagăr radial gazodinamic cu heliu al unui turbodetentor cu o turație de 250 000 rot/min.

Miniaturizarea turbodetentoarelor destinate instalațiilor criogenice s-a realizat datorită utilizării lagărelor lubrifiate cu gaz, care au permis atingerea unor turații uzuale de circa 250 000 rot/minut.

Pentru cunoașterea comportării unui lagăr radial gazodinamic este necesară determinarea variației presiunii în fluidul de lubrifiere și a forțelor aferente ce acționează în lagăr. În lucrare s-a căutat să se descrie această comportare.

În scopul deducerii ecuației ce caracterizează variația presiunii în filmul de gaz, s-au particularizat ecuațiile Navier-Stokes și ecuația de continuitate, corespunzătoare unei mișcări staționare a unui fluid compresibil, în absența forțelor exterioare [4], [6], [7].

$$\vec{V}\,\mathrm{grad}\; Vx_K + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_K} = \nu\Delta\, Vx_K \qquad \mathrm{div}\,(\rho\vec{V}) = 0 \quad K = 1, 2, 3 \tag{1}$$

unde: ρ — densitatea, V — viteza, p — presiunea, ν — vîscozitatea cinematică.

Sistemul de coordonare și mărimile caracteristice geometriei de curgere sînt prezentate în figura 1.

Se consideră că fusul este antrenat după două direcții ale vitezei: una tangențială, respectiv de rotație U, și una radială, de oscilație W.

După efectuarea analizei dimensionale asupra sistemului, ținînd cont de caracteristicile filmului de fluid și efectuarea integralelor pentru o transformare adiabatică a fluidului în lagăr se obține ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,\eta U\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\rho h) \tag{2}$$

unde η — vîscozitatea dinamică.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 2, 1992, P. 189—200

Ecuaţia (2) reprezintă o generalizare a ecuaţiei Reynolds pentru fluide compresibile.

Considerînd că presiunea nu variază în lungul axei Oz (axa fusului), pentru o transformare adiabatică, $p\rho^{\gamma} = \text{constant}$, se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[h^3 p^{1/\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right] = 6\eta U\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(hp^{1/\gamma}\right)\right] \tag{3}$$

unde γ — coeficient adiabatic al gazului.

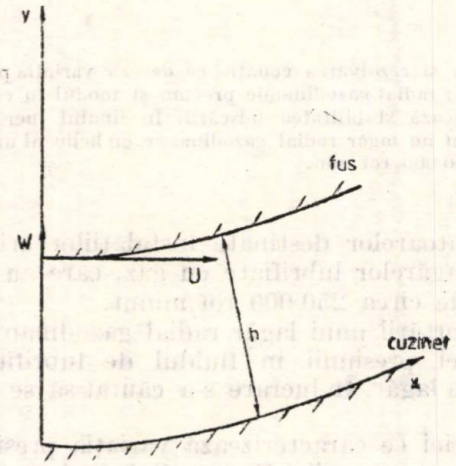


Fig. 1. — Sistemul de coordonate şi geometria de curgere în lagărul radial.

Datorită grosimii foarte mici a filmului de gaz în raport cu raza cuzinetului, se consideră axa Ox în lungul circumferinţei cuzinetului (fig. 1), astfel că :

$$\mathrm{d}x = R\mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

unde R reprezintă raza cuzinetului.

Transformarea este necesară pentru trecerea de la coordonate carteziene la un sistem de coordonate polar, φ reprezentînd unghiul la centrul corespunzător. Înlocuind ecuaţia (4) în ecuaţia (3) după efectuarea calculelor se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{1}{\gamma p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\left[\frac{3}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{6\eta UR}{h^2\gamma p}\right] - \frac{6\eta UR}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} = 0 \tag{5}$$

Ecuaţia (5) descrie variaţia presiunii într-un lagăr cu fluid compresibil, în care cuzinetul poate prezenta abateri de la circularitate.

Deducerea expresiei matematice a funcţiei ce descrie forma grosimii filmului de fluid, s-a făcut ţinînd cont de următoarele relaţii geometrice, în conformitate cu figura 2 :

$$\frac{\sin\alpha}{\varepsilon} = \frac{\sin\varphi}{R} \tag{6}$$

$$h + r = \varepsilon\cos\varphi + R\cos\alpha$$

unde :

ε — reprezintă excentricitatea, considerată distanţa între centrul cuzinetului şi centrul momentan de rotaţie al fusului

α — reprezintă unghiul dintre raza cuzinetului şi raza fusului pentru un unghi φ, corespunzător excentricităţii ε

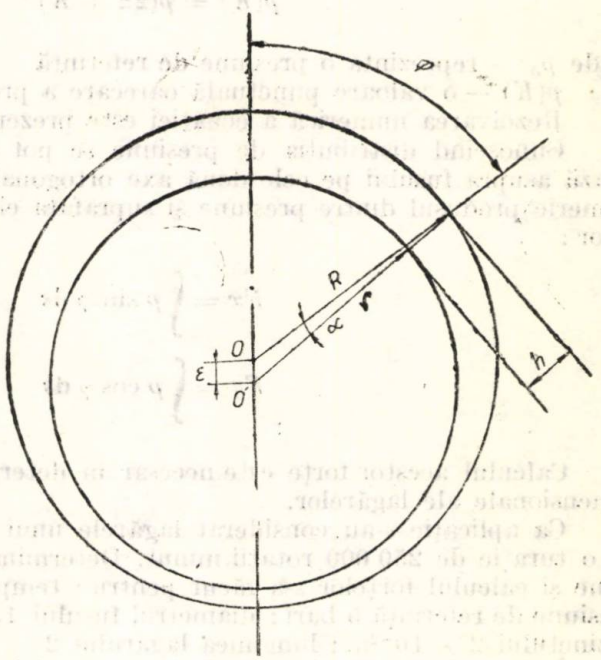


Fig. 2. — Caracteristicile geometrice ale lagărului în secţiune transversală.

R — raza cuzinetului, r — raza fusului

Din ecuaţiile (6) se obţine :

$$h = -r + \varepsilon \cos\varphi + R\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2}\sin^2\varphi} \tag{7}$$

Se dezvoltă în serie şi se reţin primii 2 termeni :

$$\begin{aligned} h &= R - r + \varepsilon\cos\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2R}\sin^2\varphi \\ \frac{dh}{d\varphi} &= -\varepsilon\sin\varphi\left[1 + \frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi\right] \end{aligned} \tag{8}$$

În cazul lagărelor în care cuzinetul nu este circular, $\frac{dh}{d\varphi}$ este de forma :

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{dR}{d\varphi}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2R^2}\sin^2\varphi\right] - \varepsilon\sin\varphi\left[1 + \frac{\varepsilon}{R}\cos\varphi\right] \tag{9}$$

Ecuația diferențială (5), este de gradul doi, neliniară, cu coeficienți variabili și are condițiile la limită :

$$\begin{aligned} p(1) &= p_0 \\ p(K) &= p(2\pi + K) \end{aligned} \tag{10}$$

unde p_0 — reprezintă o presiune de referință
$p(K)$ — o valoare punctuală oarecare a presiunii.
Rezolvarea numerică a ecuației este prezentată în Anexă.

Cunoscînd distribuția de presiune se pot calcula forțele ce acționează asupra fusului pe cele două axe ortogonale x și y, integrîndu-se numeric produsul dintre presiune și suprafața elementară, conform relațiilor :

$$\begin{aligned} Fx &= \int p \sin \varphi \, ds \\ Fy &= \int p \cos \varphi \, ds \end{aligned} \tag{11}$$

Calculul acestor forțe este necesar în determinarea caracteristicilor dimensionale ale lagărelor.

Ca aplicație s-au considerat lagărele unui turbodetentor de Heliu cu o turație de 250 000 rotații/minut. Determinarea distribuției de presiune și calculul forțelor s-a făcut pentru : temperatura de lucru 300K ; presiune de referință 5 bari ; diametrul fusului $1{,}99 \times 10^{-2}$ m ; diametrul cuzinetului 2×10^{-2}m ; lungimea lagărului 2×10^{-2} m.

În figura 3 se prezintă variația presiunii într-un lagăr radial circular cu Heliu pentru trei valori ale excentricității : $\varepsilon_1 = 0{,}025 \times 10^{-3}$ m, $\varepsilon_2 = 0{,}05 \times 10^{-3}$m, $\varepsilon_3 = 0{,}075 \times 10^{-3}$m. Se observă o creștere a valorii maxime a presiunii în lagăr odată cu creșterea excentricității, precum și o scădere a minimului acesteia.

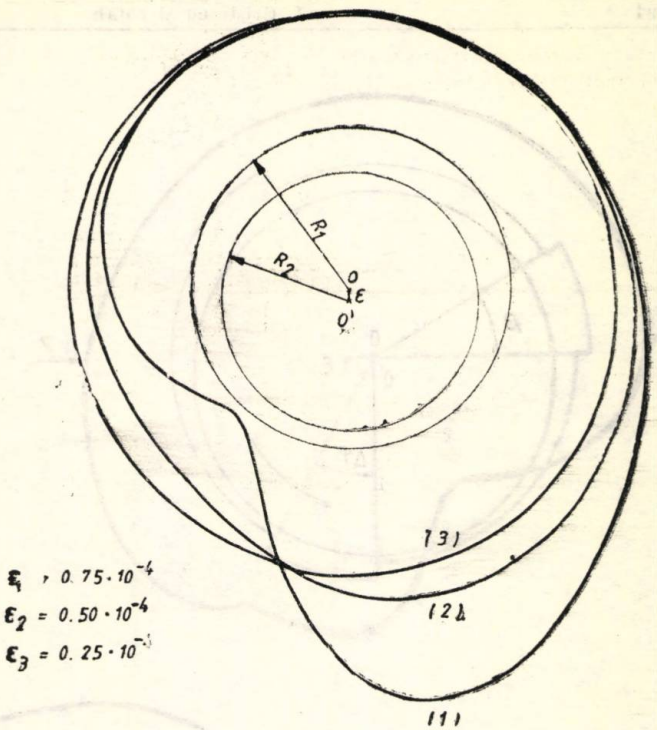
Avînd în vedere că în construcția turbodetentoarelor se folosesc două lagăre radiale dispuse la extremitățile arborelui și că jocurile în acestea sînt mici, putem considera că centrul de greutate al arborelui este fix în timpul mișcării. În acest caz, orice forță radială ce apare într-un lagăr datorită unei excentricități, apare simetric și în celălalt și determină un cuplu de forțe.

Din analiza mișcării fusului, conform figurii 4, se constată că modificarea momentului cinetic, în scopul apropierii axei de rotație proprii de axa Oz a cuzineților, este realizată numai de momentul forțelor de pe axa Ox. Cuplul forțelor de pe axa Oy are ca efect o mișcare de precesie a fusului.

În vederea îmbunătățirii cuplului de autocentrare s-au introdus discontinuități ale suprafeței circulare a cuzinetului sub formă de buzunare, în care presiunea este constantă. Acestea sînt în număr de trei, dispuse la 120° unul față de celălalt.

În figurile 5, 6 și 7 se prezintă variația presiunii într-un lagăr cu trei buzunare, de deschidere unghiulară de $\beta = 30°$, pentru o valoare a

Fig. 3. — Distribuţia presiunii în lagărul radial pentru excentricităţile : $\varepsilon_1 = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$ m ; $\varepsilon_2 = 0{,}050 \cdot 10^{-3}$ m ; $\varepsilon_3 = 0{,}025 \cdot 10^{-3}$ m.



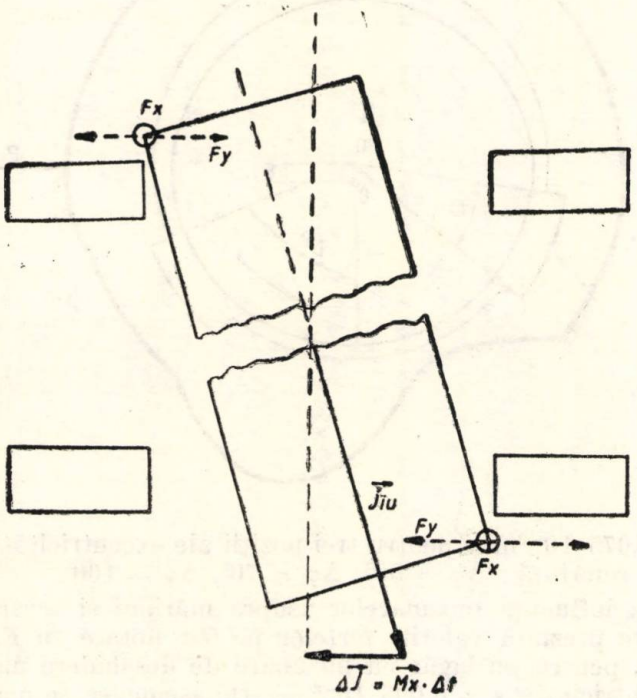


Fig. 4. — Momentul cinetic al axului sub acţiunea cuplului de forţe, generat de distribuţia de presiune.

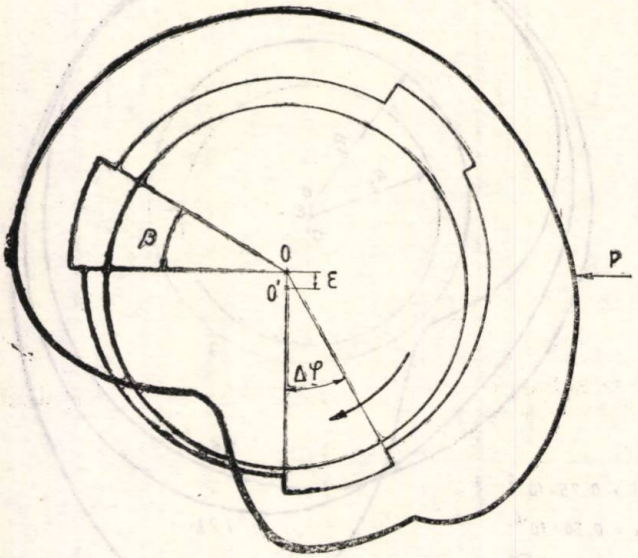


Fig. 5. — Distribuţia presiunii într-un lagăr radial cu trei buzunare cu deschidere unghiulară $\beta = 30°$, pentru o poziţie a excentricităţii faţă de un buzunar de referinţă $\Delta\varphi = 30°$; O — centrul cuzinetului; O' — centrul fusului; P — curba presiunii.

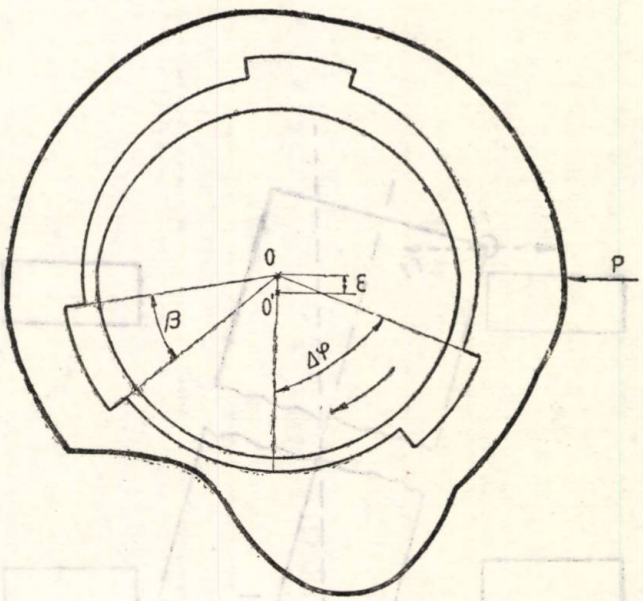


Fig. 6. — Distribuţia presiunii într-un lagăr radial cu 3 buzunare cu deschidere unghiulară $\beta = 30°$, pentru o poziţie a excentricităţii faţă de un buzunar de referinţă $\Delta\varphi = 70°$; O — centrul cuzinetului; O' — centrul fusului; P — curba presiunii.

excentricităţii de $\varepsilon = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$m şi pentru trei poziţii ale excentricităţii faţă de un buzunar de referinţă: $\Delta\varphi = 30°$, $\Delta\varphi = 70°$, $\Delta\varphi = 100°$.

Pentru a prezenta influenţa buzunarelor asupra mărimii şi sensul forţelor, în tabelul 1 se prezintă valorile forţelor pe Ox, notate cu Fx şi pe Oy, notate cu Fy, pentru un lagăr cu buzunare de deschidere unghiulară $\beta = 1°$ şi excentricitate $\varepsilon = 0{,}005 \cdot 10^{-3}$ m. De asemenea se mai

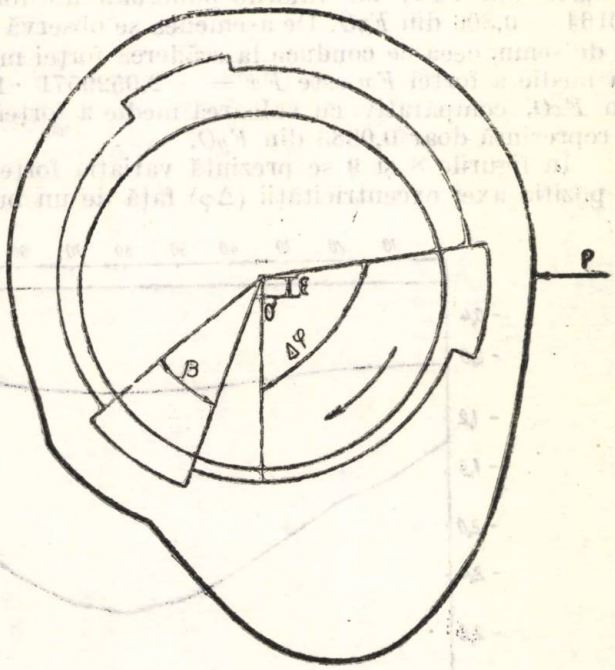


Fig. 7. — Distribuția prepresiunii într-un lagăr radial cu 3 buzunare cu deschidere unghiulară $\beta = 30°$, pentru o poziție a excentricității față de un buzunar de referință $\Delta\varphi = 100°$; O — centrul cuzinetului; O' — centrul fusului; P — curba presiunii.

Tabelul 1

$\Delta\varphi$	Forța pe axa Ox Fx (N)	Forța pe axa Oy Fy (N)	Fx/FxO	Fy/FyO
0	$-1,3660912.10^2$	$0,177310.10^2$	0,283	0,0164
10	$-1,6242552.10^2$	$-0,177404.10^2$	0,336	−0,0704
20	$-1,7983360.10^2$	$-0,459697.10^2$	0,372	−0,1820
30	$-2,0557620.10^2$	$-0,5231572.10^2$	0,425	−0,2070
40	$-2,3285652.10^2$	$-0,5426004.10^2$	0,482	−0,2150
50	$-2,5381664.10^2$	$-0,3090160.10^2$	0,525	−0,1220
60	$-2,6193708.10^2$	$0,0414520.10^2$	0,542	0,0164
70	$-2,5448380.10^2$	$0,4051020.10^2$	0,526	0,1610
80	$-2,3366280.10^2$	$0,6738160.10^2$	0,482	0,2670
90	$-2,0565300.10^2$	$0,7725216.10^2$	0,425	0,3060
100	$-1,7823652.10^2$	$0,6792084.10^2$	0,368	0,2690
110	$-1,5845776.10^2$	$0,4229549.10^2$	0,328	0,1670

prezintă rapoartele dintre aceste forțe și forțele corespunzătoare în absența buzunarelor, care sînt:

$FxO = -4,8319156 \cdot 10^2$N, pe Ox, și $FyO = 2,520882 \cdot 10^2$N, pe Oy. $\cdot\ \Delta\varphi$ reprezintă unghiul dintre axa excentricității și un buzunar oarecare de referință și ia valori între 0° și 110°, domeniu suficient pentru calculul forțelor, datorită faptului că valorile forțelor Fx și Fy depind doar de poziția axei excentricității între două buzunare.

Se observă că valorile punctuale ale forţei Fx reprezintă 0,283 ÷ ÷ 0,542 din FxO, iar valorile punctuale ale forţei Fy reprezintă doar 0,0164 ÷ 0,306 din FyO. De asemenea se observă că Fy prezintă şi variaţie de semn, ceea ce conduce la scăderea forţei medii pe Oy. Astfel valoarea medie a forţei Fx este $\bar{F}x = -2{,}0529571 \cdot 10^2$N şi reprezintă 0,425 din FxO, comparativ cu valoarea medie a forţei Fy, $\bar{F}y = 9{,}6707525$ N ce reprezintă doar 0,0383 din FyO.

În figurile 8 şi 9 se prezintă variaţia forţelor Fx şi Fy în funcţie de poziţia axei excentricităţii ($\Delta\varphi$) faţă de un buzunar, cu o deschidere

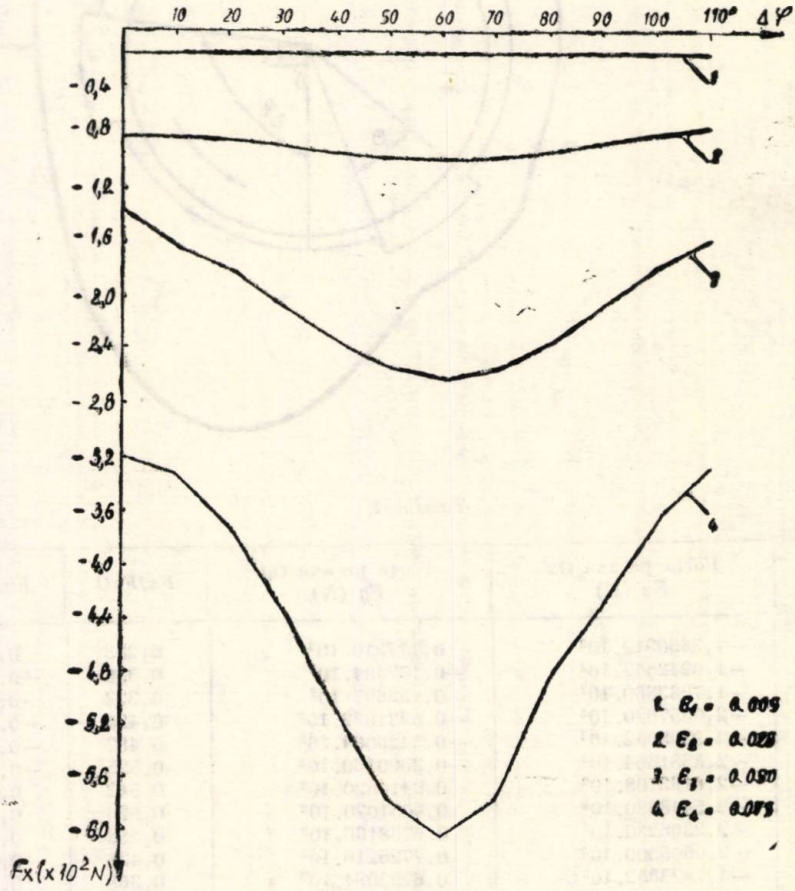


Fig. 8. — Variaţia forţelor Fx în funcţie de $\Delta\varphi$ pentru diferite valori ale excentricităţii: $\varepsilon_1 = 0{,}005 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_2 = 0{,}025 \cdot 10^{-3}$m; $\varepsilon_3 = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_4 = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$m.

unghiulară de $\beta = 1°$, pentru următoarele valori ale excentricităţii: $\varepsilon_1 = 0{,}005 \cdot 10^{-3}$ m, $\varepsilon_2 = 0{,}025 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_3 = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$ m, $\varepsilon_4 = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$ m. Se observă că odată cu creşterea excentricităţii, atît Fx cît şi Fy prezintă o creştere în valoare absolută. Din figurile 8 şi 9 se constată că indiferent de valoarea excentricităţii, forţa Fx este maximă, iar forţa Fy se anulează pentru $\Delta\varphi = 60°$.

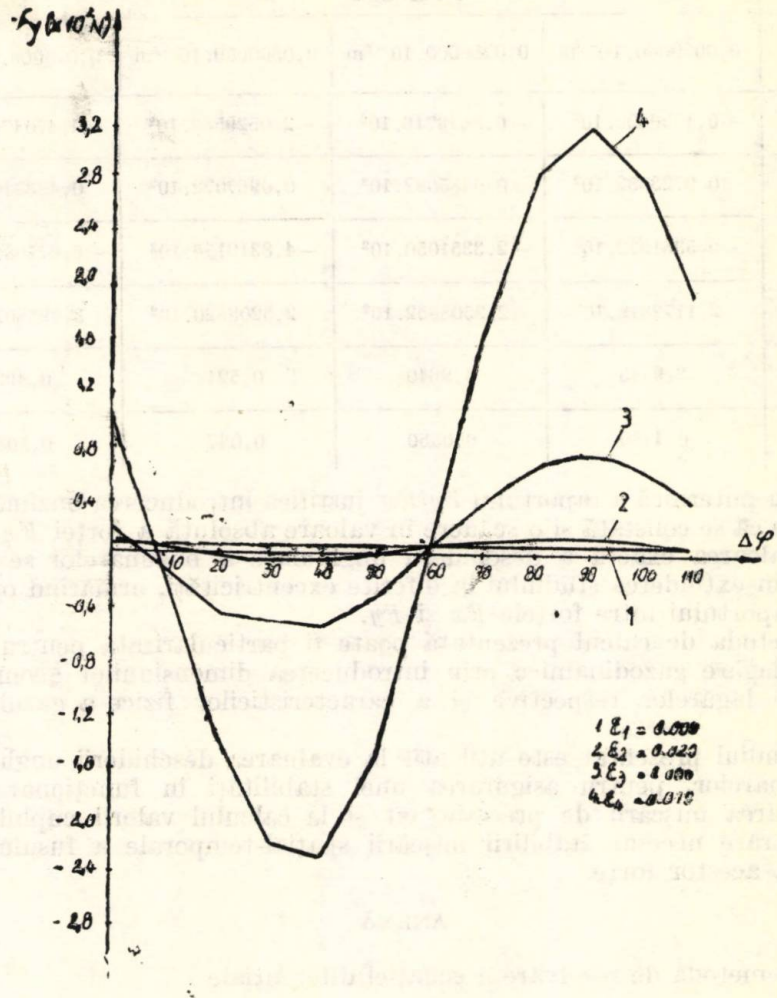


Fig. 9. — Variaţia forţelor Fy în funcţie de $\Delta\varphi$ pentru diferite valori ale excentricităţii: $\varepsilon_1 = 0{,}005 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_2 = 0{,}025 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_3 = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$m, $\varepsilon_4 = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$m.

În tabelul 2 se prezintă valorile medii ale forţelor $\bar{F}x$ şi $\bar{F}y$ pentru un lagăr cu buzunare, de deschidere unghiulară $\beta = 1°$, precum şi a forţelor FxO, FyO, în funcţie de diverse valori ale excentricităţii. De asemenea, sînt prezentate valorile raportului între forţele medii $\bar{F}x$ şi $\bar{F}y$ precum şi valorile raportului FyO/FxO a forţelor în absenţa buzunarelor. Din valorile prezentate în tabel pentru o variaţie a excentricităţii în intervalul $0{,}005 \cdot 10^{-3}$m pînă la $0{,}075 \cdot 10^{-3}$m, se constată că raportul forţelor FyO/FxO variază în intervalul $3{,}9345 \div 0{,}493$, comparativ cu intervalul $0{,}418 - 0{,}108$ corespunzător raportului $\bar{F}y/\bar{F}x$ în cazul lagărului cu buzunare. Scăderea puternică a forţei Fy în cazul introducerii buzunarelor de 5 pînă la 45 ori faţă de cazul fără buzunare, cît şi

Tabelul 2

ε	$0{,}0050000.10^{-3}$m	$0{,}0250000.10^{-3}$m	$0{,}0500000.10^{-3}$m	$0{,}075000.10^{-3}$m
$\bar{F}$x(N)	$-0{,}1730420.10^{2}$	$-0{,}8648716.10^{2}$	$-2{,}0529588.10^{2}$	$-4{,}470474.10^{2}$
$\bar{F}$y(N)	$0{,}0723052.10^{2}$	$0{,}0485092.10^{2}$	$0{,}0967072.10^{2}$	$0{,}483240.10^{2}$
FxO (N)	$-0{,}5381312.10^{2}$	$-2{,}3351050.10^{2}$	$-4{,}8319156.10^{2}$	$-6{,}67708.10^{2}$
Fyo (N)	$2{,}1172812.10^{2}$	$2{,}2508352.10^{2}$	$2{,}5208820.10^{2}$	$3{,}296802.10^{2}$
FyO/FxO	3,9345	0,9640	0,521	0,493
$\bar{F}$y/$\bar{F}$x	0,4180	0,0560	0,047	0,108

scăderea puternică a raportului Fy/Fx justifică introducerea buzunarelor, cu toate că se constată şi o scădere în valoare absolută a forţei Fx.

Valoarea exactă a deschiderii unghiulare a buzunarelor se stabileşte prin extinderea studiului la diferite excentricităţi, urmărind optimizarea raportului între forţele Fx şi Fy.

Metoda de calcul prezentată poate fi particularizată pentru orice tip de lagăre gazodinamice prin introducerea dimensiunilor geometrice specifice lagărelor respective şi a caracteristicilor fizice a gazului de lucru.

Studiul prezentat este util atît la evaluarea deschiderii unghiulare a buzunarelor, pentru asigurarea unei stabilităţi în funcţionare prin minimizarea mişcării de precesie, cît şi la calculul valorii cuplului de autocentrare necesar stabilirii mişcării spaţial-temporale a fusului sub acţiunea acestor forţe.

ANEXĂ

Ca metodă de rezolvare a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}\varphi^2}+\frac{1}{\gamma p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\left[\frac{3}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}-\frac{6\eta UR}{h^2\gamma p}\right]-\frac{6\eta UR}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}=0 \qquad (12)$$

s-a folosit metoda cu diferenţe finite. Pentru aceasta este necesară introducerea valorilor punctuale ale tuturor mărimilor ce intervin în ecuaţie, precum şi a derivatelor de ordinul 1 şi 2 ale presiunii, care s-au aproximat prin :

$$b\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{2}[p_{K+2}-p_K]$$
$$b^2\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}\varphi^2}=p_{K+2}-2p_{K+1}+p_K \qquad (13)$$

unde b reprezintă variația elementară a argumentului, iar p_{K+2}, p_{K+1}, p_K presiunile în nodurile $K+2$, $K+1$, K.

Înlocuind (13) în (12) obținem :

$$p_{K+2}\left[1+\frac{a_1 b}{2p_{K+1}}+\frac{b}{2}\left(a_2+\frac{a_3}{p_{K+1}}\right)\right]-2p_{K+1}+$$

$$+p_K\left[1-\frac{a_1 b}{2p_{K+1}}-\frac{b}{2}\left(a_2+\frac{a_3}{p_{K+1}}\right)\right]+a_4 b^2=0 \qquad (14)$$

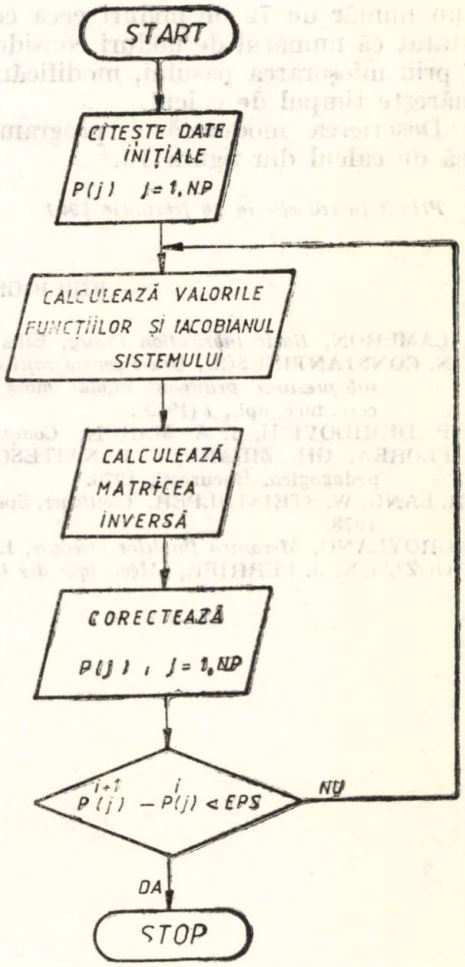


Fig. 10. — Schema logică a programului de rezolvare a ecuației ce caracterizează variația presiunii.

unde :

$$a_1=\frac{1}{\gamma}$$

$$a_2=\frac{3}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$a_3 = \frac{-6\eta UR}{h^2\gamma}$$

$$a_4 = \frac{-6\eta\, UR}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}$$

Pentru obţinerea distribuţiei de presiune în lagăr se rezolvă sistemul de ecuaţii neliniare (14) scris într-un număr arbitrar de noduri. Pentru rezolvare s-a folosit metoda Newton-Raphson luîndu-se în calcul un număr de 72 de noduri ceea ce corespunde unui pas de 5°. S-a constatat că numărul de noduri considerat în calcul este suficient, deoarece prin micşorarea pasului, modificările sînt nesemnificative, în schimb se măreşte timpul de calcul.

Descrierea modulară a programului este prezentată în schema logică de calcul din figura 10.

Primit în redacţie la 16 februarie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. A. CAMERON, *Basic lubrication theory*, Ellis Horwood, Chichester, 1976.
2. V. N. CONSTANTINESCU, *Unele consideraţii asupra calculului lagărelor cu aer alimentate sub presiune printr-un număr mare de orificii sau prin suprafeţe poroase*, St. cerc. mec. apl., *1* (1962).
3. B. P. DEMIDOVICH, I. A. MARON, *Computational mathematics*, Mir, Moscova, 1976.
4. J. FLOREA, GH. ZIDARU, V. PANAITESCU, *Mecanica fluidelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
5. O.R. LANG, W. STEINHILPER, *Gleitlager*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1978.
6. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.
7. R. OUZIAUX, J. PERRIER, *Mécanique des fluides appliquée*, Dunod, Paris, 1967.

ÎNNISIPAREA SONDELOR DE PETROL ŞI GAZE

de AL. D. STAN şi MARIA STOICESCU

Institutul de Petrol şi Gaze, Ploieşti

În lucrare se deduce pe o cale foarte simplă debitul sondei imperfecte ca urmare a înnisipării acesteia datorită viiturilor de nisip din stratul productiv.
De asemenea, se calculează coeficientul de imperfecţiune al sondei şi al stratului productiv.
Rezultatele obţinute teoretic sînt în deplină concordanţă cu acelea din producţie.

O problemă dificilă în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi o constituie nisipul antrenat în sonde, deoarece acesta se poate depune la talpă, formînd un dop care obturează circulaţia fluidelor sau împiedică manevrarea utilajului de fund al sondei.

Antrenarea nisipului din stratul productiv se datorează curgerii fluidelor către gaura de sondă, în special, cînd elementele filtrante sînt realizate imperfect sau lipsesc.

1. INTRODUCERE

Înnisiparea sondelor este un fenomen nedorit în practica exploatării zăcămintelor deoarece reduce debitul de fluid iar operaţia de denisipare presupune întreruperea producţiei sondelor. Podul de nisip din sondă poate avea o grosime mai mică sau, în unele cazuri, chiar mai mare decît grosimea stratului productiv din care a provenit.

În cazul în care fluidul se scurge printr-o conductă se produce o pierdere de presiune prin frecări ce se calculează cu relaţia

$$\Delta p = \rho \frac{v_m^2}{2} \frac{l}{d} \lambda \tag{1}$$

unde ρ este densitatea fluidului, v_m viteza medie, l lungimea de conductă, d diametrul interior, iar λ este coeficientul de rezistenţă hidraulică.

Dacă se compară această scădere de presiune cu aceea dată de legea de filtraţie a lui Darcy rezultă imediat că o conductă poate fi privită ca un mediu poros cu permeabilitatea absolută echivalentă k_e care are expresia [7].

$$k_e = \frac{2d^2}{Re \cdot \lambda} \tag{2}$$

Re este numărul lui Reynolds definit cu ajutorul vitezei medii şi diametrului interior al conductei.

Este posibil ca într-o sondă să se formeze un pod de nisip cu grosimea h_t, permeabilitatea nisipului din sondă fiind k_1 și permeabilitatea stratului productiv k(fig. 1).

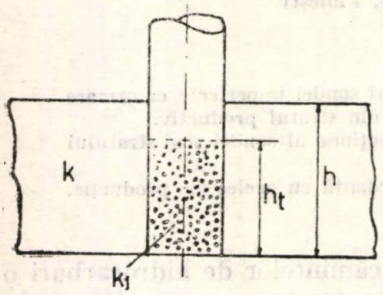


Fig. 1

Dacă se notează cu v_i viteza medie de curgere prin sonda în care s-a format podul de nisip, pierderea de presiune are expresia

$$\Delta p = \frac{\mu h\, v_i}{k_e} + \frac{\mu h_t\, v_i}{k_1} = \mu v_i \left(\frac{h}{k_e} + \frac{h_t}{k_1} \right) \tag{3}$$

Din această relație se deduce viteza medie de curgere prin sonda înnisipată, v_i

$$v_i = \frac{\Delta p \cdot k_e}{\mu h \left(1 + \frac{h_t}{h} \frac{k_e}{k_1} \right)} \tag{4}$$

μ fiind vîscozitatea dinamică a fluidului.

În situația în care nu s-ar fi înnisipat sonda, viteza medie de curgere ar fi avut expresia :

$$v = \frac{\Delta p \cdot k}{\mu h} \tag{5}$$

ceea ce înseamnă că pentru o sondă înnisipată coeficientul de imperfecție δ' se poate calcula ca raport între cele două viteze v_i și v

$$\delta' = \frac{v_i}{v} = \frac{1}{1 + \frac{h_t}{h} \frac{k_e}{k_1}} \tag{6}$$

Se observă imediat că debitul sondei înnisipate este mai mic decît al sondei neînnisipate.

În raport cu parametrii k_t/h, k_e și k_1 se pot efectua analize privind modul cum variază coeficientul de imperfecțiune al sondei înnisipate.

În relațiile stabilite anterior s-a admis, că în podul de nisip, filtrația petrolului, sau chiar a gazelor, este liniară.

De cele mai multe ori filtrația gazelor este neliniară în apropierea găurii de sondă și, cu atît mai mult, este neliniară în secțiunea sondei înnisipate.

În acest caz, se poate considera că viteza de filtrație prin podul de nisip este dată de relația [5, 8]

$$v = A \left(\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

unde gradientul de presiune $\frac{dp}{dx}$ s-a luat în valoare absolută.

Coeficienții A și n se obțin experimental pentru fiecare sort de nisip. De exemplu, în lucrarea [5] s-a obținut $A = 3{,}2642 \cdot 10^5 \, m^{\frac{n+3}{n}} / N^{\frac{1}{n}} \cdot s$ și $n = 1{,}2437$.

Avînd ca punct de plecare ultima relație, se obține cu ușurință distribuția de presiune în lungul mediului poros cu o filtrație neliniară.

$$p = \left(p_1^{n+1} - \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{l} x \right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{8}$$

unde p_1 și p_2 sînt două presiuni de referință de la capetele mediului poros și anume p_1 la $x = 0$ și p_2 la $x = l$

Gradientul de presiune are în aceste secțiuni ale mediului poros expresiile

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1^n \cdot l} \tag{9}$$

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=l} = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_2^n \, l}$$

Deoarece $p_1 > p_2$ rezultă că în valoare absolută gradientul presiunii crește în lungul mediului poros.

Într-un calcul aproximativ se poate admite că media aritmetică a celor doi gradienți în valoare absolută este egală cu gradientul mediu de presiune și anume:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{mediu}} = \frac{1}{2(n+1)l} \cdot \frac{(p_1^n + p_2^n)\,(p_1^{n+1} - p_2^{n+1})}{p_1^n \cdot p_2^n} \tag{10}$$

Relația obținută arată că în situația în care se cunosc presiunile p_1 și p_2 gradientul mediu de presiune poate fi determinat.

Pentru scopul urmărit în lucrarea noastră, din relația (7) se poate obține

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{v_t}{A}\right)^n \tag{11}$$

unde, ca și mai înainte, am considerat valoarea absolută a gradientului de presiune și am admis că viteza medie de filtrație prin podul format în sondă este v_t.

Din acest motiv, căderea de presiune prin podul de nisip este egală cu

$$\left(\frac{v_t}{A}\right)^n h_t = \Delta p'$$

Printr-un raţionament identic cu acela ce a condus la obţinerea formulei (3) se obţine acum

$$\Delta p = \frac{\mu h\, v_t}{k_e} + \left(\frac{v_t}{A}\right)^n h_t = \mu v_t \left(\frac{h}{k_e} + \frac{v_t^{n-1}}{A^n \mu}\, h_t\right) \tag{12}$$

de unde rezultă

$$v_t = \frac{\Delta p \cdot k_e}{\mu h \left(1 + \dfrac{h_t}{h}\dfrac{k_e}{k_{1n}}\right)} \tag{13}$$

În relaţia (13) s-a utilizat notaţia

$$k_{1n} = \frac{A^n \mu}{v_t^{n-1}},$$

acesta fiind un parametru de natura unei permeabilităţi.

Dacă se aplică definiţia coeficientului δ', avînd în vedere relaţia (5), rezultă expresia acestuia

$$\delta' = \frac{1}{1 + \dfrac{h_t}{h} \cdot \dfrac{k_e}{k_{1n}}} \tag{14}$$

În calcule practice parametrul k_{1n} se poate determina cu uşurinţă deoarece v_t şi A sînt cunoscuţi.

Se observă cu uşurinţă echivalenţa formulelor (6) şi (14). Ambele formule pot fi extinse şi pentru valori ale înălţimii coloanei de nisip mai mari decît grosimea stratului productiv. La ambele situaţii la care ne-am referit se observă cu uşurinţă că pentru valori foarte mari ale grosimii podului de nisip coeficientul de imperfecţiune este nul.

2. IMPERFECŢIUNEA STRATULUI PRODUCTIV DATORITĂ ÎNNISIPĂRII SONDEI

Înnisiparea parţială sau totală a unei sonde conduce la o modificare a elementelor hidrodinamice din zăcămînt. Înaintea înnisipării unei sonde productive de petrol, de exemplu, pentru curgere radial plană simetrică a petrolului, debitul se determină cu formula [1, 2]

$$Q = \frac{2\pi\, kh\, (p_c - p_s)}{\mu \ln \dfrac{r_c}{r_s}} \tag{15}$$

p_c şi p_s fiind presiunea pe conturul de alimentare, la $r = r_c$ şi respectiv, în sondă, deci la $r = r_s$. Aşa cum se cunoaşte, ultima formulă presupune lipsa oricărui element filtrant în dreptul stratului productiv, deci şi a

coloanei de exploatare dacă aceasta există. În lucrarea noastră vom considera că și în situația coloanei perforate debitul Q al sondei este perfect, iar dacă apare un pod de nisip în sondă, debitul Q_i va fi admis imperfect.

Apare deci o modificare a noțiunii de perfecțiune a sondei privită după modul de deschidere al stratului productiv [1]. În cazul în care înălțimea podului de nisip este mai redusă decît grosimea stratului productiv și $k_1 = 0$, sonda devine imperfectă după gradul de deschiderea stratului productiv [2].

Curgerea petrolului sau gazelor naturale prin coloana de extracție neînnisipată poate fi privită ca scurgerea unuia dintre cele două fluide printr-un mediu poros cu permeabilitatea k_c. În scopul comparării debitelor de la sonda perfectă și aceea imperfectă, deci potrivit lucrării noastre sonda înnisipată, este necesar să fie calculate aceste debite. În cazul sondei perfecte, la scurgerea debitului sondei de la conturul de alimentare pînă la acoperișul stratului productiv se realizează căderea de presiune în strat egală cu $\frac{\mu Q \ln \frac{r_c}{r_s}}{2\pi kh}$ și în lungul coloanei de exploatare egală cu $\frac{\mu v h}{k_c}$. Viteza de filtrare, v, din ultima cădere de presiune coincide cu căderea de presiune în coloana de exploatare. Datorită acestei observații, rezultă că tot debitul Q al sondei perfecte se scrie

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v \tag{16}$$

Căderea totală de presiune va fi egală cu suma celor două căderi de presiune realizate în stratul productiv și în coloana de exploatare

$$p_c - p_{st} = \frac{\mu Q}{\pi}\left(\frac{\ln \frac{r_c}{r_c}}{2kh} + \frac{4h}{k_c d^2}\right) \tag{17}$$

unde p_{st} reprezintă presiunea din sondă la nivelul acoperișului stratului productiv.

În cazul sondei înnisipate este de observat că pe înălțimea zonei înnisipate de grosime h_i, căderea de presiune se deduce utilizîndu-se formula (3) în care se introduce $h_i = h$, iar pe grosimea $(h - h_i)$ scurgerea fluidului se produce prin coloana liberă a cărei cădere de presiune se calculează potrivit relației (5).

Datorită acestor considerente, rezultă că tot de la conturul de alimentare al sondei pînă la nivelul acoperișului stratului productiv se realizează căderea de presiune

$$p_c - p_{st} = \frac{\mu Q_i}{\pi}\left[\frac{\ln \frac{r_c}{r_s}}{2kh} + \frac{k_1 + k_c}{k_1 k_c} \cdot \frac{4h_i}{d^2} + \frac{4(h - h_i)}{k_c d^2}\right] \tag{18}$$

Coeficientul de imperfecțiune al stratului productiv va avea deci expresia

$$\delta'' = \frac{Q_i}{Q} = \frac{\ln \frac{r_c}{r_s} + 8 \frac{k}{k_e} \cdot \frac{h^2}{d^2}}{\ln \frac{r_c}{r_s} + 8 \frac{k}{k_e} \frac{h^2}{d^2} + 8 \frac{k}{k_1} \frac{h\, h_t}{d^2}} \tag{19}$$

Se observă că pentru cazul în care podul de nisip are o înălțime foarte redusă $h_t = 0$, se găsește $\delta'' = 1$, iar pentru o grosime foarte mare $\delta'' = 0$. Formula obținută se particularizează și pentru alte cazuri cum ar fi : $k_1 = k$, $h_e \gg k$, etc. asupra cărora nu insistăm deoarece nu prezintă dificultăți de aplicat.

Trebuie observat faptul că expresia coeficientului δ'' include și pe aceea a imperfecțiunii sondei δ', dată de una dintre formulele (6) sau (14) după cum filtrarea este liniară sau neliniară. În acest scop se pot lua pentru cazul unei filtrări liniare în sondă, relația (6) și ultima formulă stabilită, de asemenea valabilă pentru o filtrare liniară în sondă și prin unele calcule simple se ajunge la echivalența celor două relații.

Se știe că pentru un argument x mic există egalitatea aproximativă

$$\ln (1 + x) \approx x \tag{20}$$

Bazat pe aceasta se poate scrie succesiv

$$\ln \frac{r_c}{r_s} = -\ln \frac{r_s}{r_c} \approx -\left(\frac{r_s}{r_c} - 1\right) = \frac{r_c - r_s}{r_c} \tag{21}$$

Practic se întîmplă ca $r_c \gg r_s$, ceea ce face ca să se aproximeze

$$\ln \frac{r_c}{r_s} \approx 1 \tag{22}$$

Datorită acestei egalități aproximative, formula (19) devine acum

$$\delta'' = \frac{1 + 8 \frac{k}{k_e} \frac{h^2}{d^2}}{1 + 8 \frac{k}{k_e} \frac{h^2}{d^2} + 8 \frac{k}{k_1} \frac{h\, h_t}{d^2}} \tag{23}$$

La ultima ecuație probabil că se realizează cel mai frecvent

$$\frac{8\, k h^2}{k_e\, d^2} \gg 1 \tag{24}$$

ceea ce face ca δ'' să devină egal cu δ' dat de (6)

$$\delta'' = \frac{1}{1 + \frac{k_e}{k_1}\frac{h_t}{h}} = \delta' \tag{25}$$

Datorită acestei situații apare evident că δ'' dat de relația (19) este coeficientul de imperfecțiune ce trebuie considerat în practica de șantier. Relația simplificată (23) este un caz particular și poate fi utilizată în calculele expeditive sau în situația în care unele mărimi (r_e, k) se estimează cu dificultate.

Cu toate că formula (19) pentru coeficientul de imperfecțiune global al sondei și stratului productiv poate fi considerată exactă, totuși, la obținerea acesteia s-a admis că la ambele sonde, înnisipată și neînnisipată, debitele au valorile constante Q_i și respectiv Q pe întreaga grosime a stratului productiv. Această situație nu se întîmplă în realitate. Așa cum am stabilit intr-o altă lucrare [3], la un tub permeabil căderea de presiune este mai mică decît pentru tubul impermeabil. Rezultatul stabilit în lucrarea menționată poate fi adaptat pentru cazul în care fluidul pătrunde prin pereții tubului permeabil, cum este situația la înnisiparea unei sonde sau chiar la o sondă neînnisipată. Astfel, pentru o lungime oarecare l, căderea de presiune este dată de relația

$$\Delta p = \frac{128\mu}{\pi d^4}(Q_0 + 0{,}5\, Q_f)\, l \tag{26}$$

unde Q_0 este debitul la începutul tubului permeabil, adică debitul ce tranzitează tubul, iar Q_f este debitul filtrat prin pereții tubului.

La o sondă cu talpa impermeabilă, unde $Q_0 = 0$, rezultă că (26) devine

$$\Delta p = \frac{64\ \mu l\, Q_f}{\pi d^4} = \frac{16\mu\, l v_m}{d^2} \tag{26'}$$

Dacă se apelează și acum la introducerea permeabilității echivalente k_e, știind că la mișcarea laminară Re $\lambda = 64$, rezultă căderea de presiune

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu l\, v_m}{k_e} \tag{27}$$

Și acum se poate introduce o aproximație și anume, debitul filtrat prin zona înnisipată a sondei este proporțional cu înălțimea totală a stratului productiv adică $Q_i \frac{h_t}{h}$ iar în partea de coloană neînnisipată debitul va fi $Q_i \frac{h - h_t}{h}$. În afară de această aproximație, se are în vedere că pe zona înnisipată întregul debit va fi filtrat prin pereții sondei, iar în partea neînnisipată trebuie avută în vedere formula (26) deoarece

debitul $Q_t \frac{h_t}{h}$ este debitul tranzitat prin această porțiune de tub iar cel de al doilea debit, $Q_t \frac{h - h_t}{h}$ este filtrat prin pereți.

Printr-un calcul asemănător cu acela care a dus la obținerea formulei (19) se găsește acum o expresie, apreciată de către noi, ca fiind cea mai exactă a coeficientului de imperfecțiune

$$\delta_e'' = \frac{\ln \frac{r_c}{r_s} + 4 \frac{k}{k_e} \cdot \frac{h^2}{d^2}}{\ln \frac{r_c}{r_s} + 4 \frac{k}{k_e} \frac{h^2}{d^2} + 4 \frac{k}{k_1} \cdot \frac{h_t^2}{d^2}} \tag{28}$$

Și acum dacă utilizăm aproximația (22) și condiția (24) se găsește egalitatea

$$\delta_e'' = \delta'. \tag{29}$$

În practică se utilizează frecvent valorile numerice $r_c = 100$ m $r_s = 0{,}07$ m, ceea ce face ca $d = 0{,}14$ m, iar pentru mișcarea laminară rezultă deci

$$k_e = \frac{d^2}{32} = \frac{0{,}14^2}{32} = 6{,}125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

La această valoare, dacă se ia de exemplu $k = k_1 = 1\text{D} = 10^{-12}\text{ m}^2$ $h = 20$ m și $h_t = 1/2$ h rezultă $\delta'' = 4{,}3705 \cdot 10^{-7}$ și $\delta_e'' = 2{,}1802 \cdot 10^{-7}$.

Deși orientative, valorile obținute pentru δ'' și δ_e'', acestea arată că probabil pentru toate valorile din practica de șantier se realizează inecuația

$$\delta'' > \delta_e'' \tag{30}$$

Este posibil ca datorită egalității $k = k_1$ precum și a valorilor numerice alese ne-a condus la valori ale coeficienților de imperfecțiune δ'' și δ_e'' foarte reduse.

Coeficienții de imperfecțiune ai sondei calculați cu formula (6) au fost comparabili cu aceia obținuți la mai multe sonde înnisipate.

3. MIȘCAREA FLUIDULUI VÎSCOS PRIN COLOANA ÎNNISIPATĂ

Scurgerea fluidului vîscos prin coloana înnisipată poate fi soluționată prin integrarea ecuațiilor de mișcare Navier-Stokes scrise în coordonate cilindrice care au formele

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \tag{31'}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{31''}$$

u reprezintă viteza pe direcție radială, iar v pe direcția axială. ν este viscoszitatea cinematică a fluidului. La aceste ecuații se adaugă ecuația de continuitate pentru un fluid incompresibil, mișcarea avînd simetrie axială

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

Se poate introduce acum funcția $\psi = \psi(r, z)$ definită prin relațiile

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ și } rv = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{33}$$

Această introducere a funcției ψ se justifică prin aceea că satisface ecuația de continuitate (32).

Eliminarea presiunii între relațiile (31') și (31'') duce la obținerea ecuației

$$\left(u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{\partial z} - \frac{u}{r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right) = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{34}$$

Se poate considera că funcția ψ are forma

$$\psi(r, z) = r\,\Phi(r, z) \tag{35}$$

Se observă că dacă se introduce notația

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \tag{36}$$

atunci ω se pune și sub forma

$$\omega = \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi \tag{37}$$

unde s-a introdus notația

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r \tag{38}$$

Cu această notație ecuația (34) se scrie imediat

$$\left(ur\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = \nu\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\Phi \tag{39}$$

În mai multe cazuri, ecuația s-a rezolvat pentru un regim de mișcare foarte lent ceea ce presupune că termenul din dreapta are valori cu mult mai mari decît a aceluia din stînga [3, 4, 6]. Astfel se scrie imediat

$$D^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r^2} \tag{40}$$

ceea ce presupune că egalarea cu zero a membrului drept al ecuației (39) este echivalentă cu soluționarea ecuației diferențiale

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{41}$$

Componentele vitezei u și v satisfac condițiile la limită

$$\text{la } r = 0 \; u = 0 \text{ și } \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \tag{42}$$

$$\text{la } r = r_s \; u = -U(z) \text{ și } v = 0 \tag{43}$$

Cea de a doua dintre condițiile (42) arată că viteza v prezintă un maxim tot în axul tubului de curent, iar prima dintre condițiile (43) arată că viteza radială este funcție doar de variabila z.

Ecuația diferențială (41) presupunem că admite soluția

$$\Phi(r, z) = R(r)\, Z(z) \tag{44}$$

Funcțiile $R(r)$ și $Z(z)$ din motivele care vor rezulta în lucrarea noastră nu trebuie determinate. De altfel, cunoașterea exactă a acestora ar fi posibilă numai dacă s-ar ști dependența lui U de variabila independentă z. Datorită acestei ipoteze rezultă că u și v date de relațiile (33) au formele

$$u = RZ' \tag{45}$$

$$v = -\frac{R}{r}Z - R'Z \tag{46}$$

Accentele plasate la funcțiile R și Z arată ordinul de derivare al acestor funcții din raport cu r și, respectiv, z.

Datorită primei condiții la limită (42) rezultă

$$R_0 = 0 \tag{47}$$

iar cea de a doua dintre condițiile (43) duce, avînd în vedere și ecuația precedentă, la relația

$$\frac{R_0'}{r} + R_0'' = 0 \tag{48}$$

unde R_0 reprezintă valoarea funcției $R(r)$ pentru $r = 0$.

Condițiile (43) se scriu în mod asemănător și duc la scrierea ecuațiilor

$$R_s Z' = - U(z) \tag{49}$$

$$\frac{R_s}{r_s} + R_s'' = 0 \tag{50}$$

R_s reprezintă valoarea funcției $R(r)$ pentru $r = r_s$.

Efortul de forfecare pe peretele tubului cilindric cu raza r_s are valoarea

$$\tau_s = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Bigg|_{r=r_s} = \mu \frac{R_s}{r_s} Z' \tag{51}$$

Dacă se are în vedere relația (49) rezultă că τ_s are valoarea

$$\tau_s = - \mu \frac{U(z)}{r_s} \tag{52}$$

Căderea de presiune Δp_t ce se realizează pe pereții tubului cilindric cu raza r_s și înălțimea h_t se determină avînd ca punct de plecare echilibrul de forțe pe un element de tub cu lungimea dz

$$\pi r_s^2 \, dp_t = 2\pi \, r_s \, \tau_s \, dz \tag{53}$$

de unde se obține

$$\Delta p_t = \frac{2}{r_s} \int_0^{h_t} \tau_s \, dz = \frac{2\mu}{r_s^2} \int_0^{h_t} U(z) \, dz \tag{54}$$

Apare evident că în situația unui caz particular cînd $U(z) = 0$, nefiind fluid în tubul de curent, nu se realizează o cădere de presiune în lungul acestuia.

În afara căderii de presiune realizată prin frecări pe pereții tubului se mai realizează o cădere de presiune Δp_n datorită prezenței nisipului în sonda înnisipată. Pentru aceasta este necesară cunoașterea vitezei medii v_m

$$v_m = \frac{2\pi}{\pi r_s^2} \int_0^{r_s} vr \, dr = - \frac{2}{r_s^2} \int_0^{r_s} Z \left(\frac{R}{r} + R' \right) r \, dr \tag{55}$$

Rezolvarea integralei anterioare nu prezintă dificultăți de calcul și conduce la rezultatul

$$v_m = - \frac{2Z}{r^2} R_s \tag{56}$$

Dacă se are și acum în vedere relația (52) se obține

$$v_m = 2\frac{Z}{Z'}\frac{U(z)}{r_s^2} \tag{57}$$

Pentru un element de lungime dz a tubului de curent cu permeabilitatea k_1 căderea de presiune elementară dp_n satisface ecuația diferențială

$$dp_n = -\frac{\mu v_m\, dz}{k_1} \tag{58}$$

și prin integrare între 0 și h_t rezultă

$$\Delta p_n = 2\frac{\mu}{r_s^2 k_1}\int_0^{h_t}\frac{Z}{Z'}U(z)\,dz \tag{59}$$

Căderea totală de presiune Δp are valoarea

$$\Delta p = \Delta p_t + \Delta p_n = \frac{2\mu}{r_s^2}\int_0^{h_t}\left(1 + \frac{Z}{Z'}\cdot\frac{1}{k_1}\right)U(z)\,dz \tag{60}$$

Cu toate că forma funcțiilor Z și Z' nu este precizată, avînd în vedere că nu este cunoscută dependența vitezei U de variabila z, se poate efectua un calcul mult mai util în practica de șantier decît acela anterior. În acest scop, se definesc vitezele medii $\bar{U}$ și $\bar{V}$ în raport cu variabila z,

$$\bar{U} = \frac{1}{h_t}\int_0^{h_t}U(z)\,dz \tag{61}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{h_t}\int_0^{h_t}v_m\,dz = \frac{2}{h_t r_s^2}\int_0^{h_t}\frac{Z}{Z'}U(z)\,dz \tag{62}$$

Cu aceste valori ale vitezelor medii, căderea totală de presiune se scrie

$$\Delta p = \frac{2\mu}{r_s^2}h_t\left(\bar{U} + \frac{r_s^2}{k_1}\cdot\frac{\bar{V}}{2}\right) \tag{63}$$

Formula obținută permite particularizările ce vor duce la unele rezultate cunoscute. Astfel, pentru cazul unui tub impermeabil, $\bar{U} = 0$, și

$k_1 = \frac{d^2}{32}$ rezultă imediat căderea de presiune dată de una dintre formele sub care se scrie relația Hagen-Poiseuille.

$$\Delta p = \frac{32\,\mu h_t \bar{V}}{d^2} \tag{64}$$

În cazul în care se definesc vitezele medii pentru un anumit debit Q cu ajutorul relațiilor

$$\bar{U} = \frac{Q}{2\pi r_s h_t} \text{ și } \bar{V} = \frac{Q}{\pi r_s^2} \tag{65}$$

și deoarece $d = 2r_s$, rezultă

$$\bar{U} = \frac{r_s}{2h_t}\bar{V} = \frac{d}{4h_t}\bar{V} \tag{66}$$

Acest rezultat introdus în (63) duce la obținerea căderii de presiune

$$\Delta p = \frac{32\mu\, h_t \bar{V}}{d^2}\left(1 + \frac{d}{16\, h_t}\right) \tag{67}$$

Rezultatul arată că la un tub cu pereții permeabili, debitul fiind distribuit în lungul său, căderea de presiune este mai mare cu $\left(1 + \frac{d}{16\, h_t}\right)$ față de cazul în care tubul ar fi impermeabil și în ambele tuburi ar fi aceeași viteză medie în secțiunea transversală a tubului.

Rezultatul obținut anterior, formula (67), practic nu modifică sensibil coeficienții de imperfecțiune dați de una dintre relațiile (23) sau (28) deoarece în practică raportul $\frac{d}{16\, h_t}$, probabil, are valori neînsemnate, întrucît diametrul coloanei de exploatare este cu mult mai mic decît grosimea coloanei de nisip formată în sondă.

De asemenea, relația (67) verifică și cazul particular cînd $h_t = 0$ deoarece atunci se obține

$$\lim_{h_t \to 0} \Delta p = \lim_{h_t \to 0}\left[\frac{32\mu\, h_t \bar{V}}{d^2}\left(1 + \frac{d}{16\, h_t}\right)\right] = \frac{2\mu\, \bar{V}}{d} \tag{68}$$

și datorită formulei (66) rezultă imediat

$$\lim_{h_t \to 0} \Delta p = 0$$

4. REZULTATE ÎNREGISTRATE ÎN ŞANTIER LA SONDELE DE PETROL ÎNNISIPATE

În unele sonde de petrol sau gaze s-au produs fenomene de înnisipare; podul de nisip format la talpa sondelor a fost cu înălţimi variabile.

Pentru unele sonde de petrol şi gaze se redau pe graficul din figura 2 coeficientul de imperfecţiune al sondelor înnisipate în funcţie de raportul h_t/h. Se observă o foarte bună corelaţie între cei doi parametri. Calculele

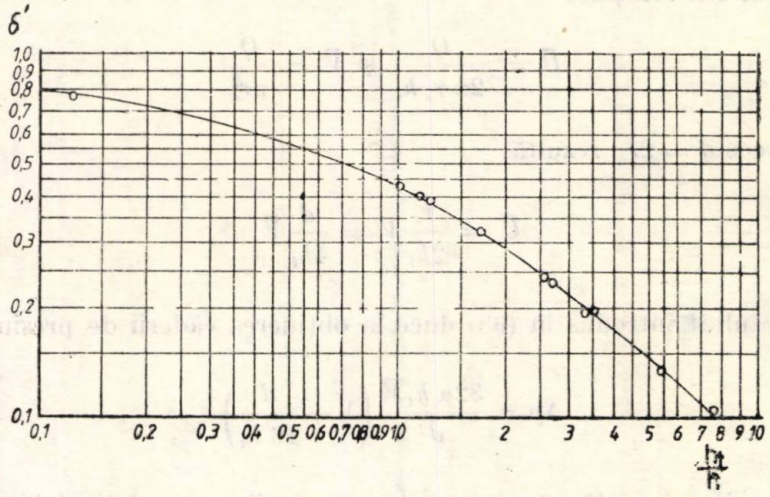


Fig. 2

au fost efectuate considerînd că raportul dintre permeabilitatea din stratele productive şi acela din podul de nisip din sondele înnisipate este egal cu unitatea.

La prelucrarea rezultatelor înregistrate la sondele înnisipate am admis egalitatea $k = k_1$.

5. CONCLUZII

Înnisiparea sondelor de petrol şi gaze se produce de multe ori, mai ales, atunci cînd nisipul nu este consolidat în strat şi elementele filtrante sînt imperfecte.

Înălţimea podului de nisip din sondă reduce debitul sondei înnisipate faţă de cazul în care sonda nu ar fi înnisipată. Coeficientul de imperfecţie poate fi definit avînd în vedere elementele din gaura sondei sau împreună cu aceste elemente şi cele ale stratului productiv. Rezultatele obţinute în lucrare sînt în deplină concordanţă cu acelea înregistrate la mai multe sonde extractive de petrol.

Primit în redacţie la 20 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, *Hidraulică generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 285—290.
2. I. CREȚU, Al. D. STAN, *Sondă parțial penetrată a unui strat productiv*, St. cerc. mec. apl., **43**, *1* (1984).
3. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Mișcarea unui fluid printr-un tub cu pereții permeabili*, St. cerc. mec. apl., **38**, *1* (1979).
4. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Sur les écoulements dans les fissures circulaires à parois perméables*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **24**, *2* (1979).
5. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari*, St. cerc. mec. apl., **40**, *4* (1981).
6. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 23—29.
7. AL. D. STAN, FL. MINESCU, *Permeabilități mărite în jurul găurii de sondă*, Mine, Petrol și Gaze, **34**, *11* (1983).
8. AL. D. STAN, MARIA STOICESCU, *Filtrarea nelineară a gazelor prin mediile poroase*, St. cerc. mec. apl., **47**, *5* (1988).

1948

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental : de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interobital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calcul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

H. DUMITRESCU, A. GEORGESCU, AL. DUMITRACHE, V. CEANGĂ, I. S. POPOVICI, GH. GHIȚĂ, B. NICOLAESCU, **Calculul elicei**, 1990, 675 p., 63 lei.

H. POPAESCU, **Calculul secțiunilor elementelor din beton armat, proiectare rapidă**, 1990, p., 68 lei.

D. MATEESCU, N. JUNCAN, PRECUPANU, D. FLORESCU, **Construcții metalice pretensionate**, 1989, 360 p., 36 lei.

R. P. VOINEA, D. C. VOICULESCU, F. P. SIMION, **Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie**, 1988, 1157 p., 95 lei.

G. V. VASILIEV, **Bazele calculului structurilor aeronautice cu pereți subțiri**, vol. 1, 1988, 286 p., 26 lei; vol. 2, 1988, 296 p., 30 lei.

D. MATEESCU, N. BĂLUȚ, I. CARABĂ, **Calculul plan și spațial al grinzilor căilor de rulare executate din oțel**, 1988, 462 p., 42 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Dinamica fluidelor viscoase în regim laminar**, 1987, 864 p., 71 lei.

I. CORNEA, GH. MĂRMUREANU, M. ONCESCU, FL. BĂLAN (coordonator ȘT. BĂLAN), **Introducere în mecanica fenomenelor seismice și inginerie seismică**, 1987, 548 p., 50 lei.

I. ANTON, **Cavitația** vol. 1, 1984, 339 p., 47 lei; vol. 2, 1985, 720 p., 88 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES

— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

ISSN 0039—4017

ST. CERC. MEC. APL., TOM 51, NR. 2, 1992, P. 113—216

S.C. „Universul" S.A c. 3356

Lei 150 pentru persoane fizice
Lei 250 pentru persoane juridice